Funktionsuntersuchung einer gebrochenrationaler Winkelfunktion am Beispiel

$$f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \cos(x)} \text{ mit } -\pi \le x \le 2\pi$$

	allgemein	auf Beispiel bezogen
1.	Periodizität	Die Periode sowohl der Zählerfunktion als auch der Nennerfunktion betragen 2 π. Damit ist zu vermuten, daß diese Periode auch für f(x) gilt. Überprüfung und Nachweis: $f(x) = f\left(x + 2k\pi\right);\ k \in Z$ $\frac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} = \frac{3\sin(x+2k\pi)}{2-\cos(x+2k\pi)}$ mit $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ $\frac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} = \frac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} \Rightarrow p = 2\pi$
2.	Definitionsbereich $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $u(x) = 0 \ \textit{für} \ v(x) \neq 0$	DB: $x \in R;\ x = \left[-\pi; 2\pi\right]$ wegen $2 - \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 2 \Rightarrow$ n.d.
3.	<u>Nullstellen</u> $f(x) = 0$ $\Rightarrow u(x) = 0$ und $v(x) \neq 0$ Schnittpunkte mit der Abszisse	Nullstellen: $\frac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} = 0 \quad \text{mit } 2 - \cos(x) \neq 0$ $3\sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_0 = k \cdot \pi;\ k \in Z$ $\Rightarrow x_{0_1} = 0;\ x_{0_2} = \pi;\ x_{0_3} = 2\pi;\ x_{0_4} = -\pi$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot \cos(x) \cdot (2 - \cos(x)) - 3 \cdot \sin(x) \cdot \sin(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3\sin^2(x)}{(2 - \cos(x))^2}$$

$$= \frac{6\cos(x) - 3}{(2 - \cos(x))^2} = 3 \cdot \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$$

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{2 \cdot (-\sin(x)) \cdot (2 - \cos(x))^2 - (2\cos(x) - 1) \cdot 2 \cdot (2 - \cos(x)) \cdot \sin(x)}{(2 - \cos(x))^4}$$

$$= 3 \cdot \frac{2 \cdot (-\sin(x)) \cdot (2 - \cos(x)) - (2\cos(x) - 1) \cdot 2 \cdot \sin(x)}{(2 - \cos(x))^3}$$

$$= 3 \cdot \frac{-4\sin(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) - 4\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\sin(x)}{(2 - \cos(x))^3}$$

$$= \frac{3 \cdot (-2\sin(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x))}{(2 - \cos(x))^3} = \frac{3 \cdot (-2\sin(x) \cdot (1 + \cos(x)))}{(2 - \cos(x))^3} = \frac{-6\sin(x) \cdot (1 + \cos(x))}{(2 - \cos(x))^3}$$

$$f'''(x) = \frac{[-6\cos(x) \cdot (1 + \cos(x)) - 6\sin(x) \cdot (-\sin(x))] \cdot (2 - \cos(x))^3 - (-6\sin(x) \cdot (1 + \cos(x))) \cdot}{(2 - \cos(x))^6}$$

$$\frac{3 \cdot (2 - \cos(x))^2 \cdot \sin(x)}{1}$$

$$f'''(x) = \frac{[-6\cos(x) \cdot (1 + \cos(x)) - 6\sin(x) \cdot (-\sin(x))] \cdot (2 - \cos(x)) - [-6\sin(x) \cdot (1 + \cos(x))] \cdot 3\sin(x)}{(2 - \cos(x))^4}$$

$$= \frac{\left[-6\cos(x) - 6\cos^2(x) + 6\sin^2(x)\right]\cdot\left(2-\cos(x)\right) - \left[-6\sin(x) - 6\sin(x)\cdot\cos(x)\right]\cdot 3\sin(x)}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$$

$$= \frac{-12\cos(x) - 12\cos^2(x) + 12\sin^2(x) + 6\cos^2(x) + 6\cos^3(x) - 6\sin^2(x)\cdot\cos(x) - \left[-18\sin^2(x) - 18\sin^2(x)\cdot\cos(x)\right]}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$$

$$= \frac{6\cos^3(x) - 6\cos^2(x) - 12\cos(x) + 12\sin^2(x) - 6\sin^2(x)\cdot\cos(x) + 18\sin^2(x) + 18\sin^2(x)\cdot\cos(x)}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$$

$$= \frac{6\cos^3(x) - 6\cos^2(x) - 12\cos(x) + 30\sin^2(x) + 12\sin^2(x)\cdot\cos(x)}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$$

$$= 6\cdot\frac{\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 5\sin^2(x) + 2\sin^2(x)\cdot\cos(x)}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$$

4. <u>Extrempunkte</u>

Extremstellen:
notwendige Bedingung:
f`(x) = 0

$$f'(x) = \frac{3\cdot\left(2\cos(x)-1\right)}{\left(2-\cos(x)\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3\cdot\left(2\cos(x)-1\right) = 0 \Rightarrow 2\cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{I.Q.}: x_{E_1} = \frac{\pi}{3};\ \text{IV.Q.}: x_{E_2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3};\ \text{in } -\pi \le x \le 0: x_{E_3} = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3};$$

$$f''(x) = \frac{-6\sin(x)\cdot\left(1+\cos(x)\right)}{\left(2-\cos(x)\right)^3}$$

hinreichende Bedingung:
f``(x) ≤ 0 ⇒ Max.
f``(x) ≥ 0 ⇒ Min.

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3} = \frac{-6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{-\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{-\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\frac{27}{8}} = \frac{-9\cdot 8\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 27} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x_{E_1}\ \text{ist Min.}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-6\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\left(1+\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)}{\left(2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^3} = \frac{-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\frac{27}{8}} = \frac{9\cdot 8\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 27} = \frac{4}{3}\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x_{E_1}\ \text{ist Max.}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(1+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3} = \frac{-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{\frac{27}{8}} = \frac{9\cdot 8\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 27} = \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x_{E_1}\ \text{ist Max.}$$

Extrempunkte:

	E (x_E ; f(x_E))	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=\sqrt{3}$ $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{-3\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=-\sqrt{3}$ $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{-3\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=-\sqrt{3}$ $H\left(\frac{\pi}{3}\,;\,\sqrt{3}\right);\ T_1\left(\frac{5\pi}{3}\,;\,-\sqrt{3}\right);\ T_2\left(-\frac{\pi}{3}\,;\,-\sqrt{3}\right)$
5.	<u>Wendepunkte</u> *notwendige Bedingung:* *f``(x_w) = 0* *hinreichende Bedingung:* *f```(x_w) ≠ 0*	$f''(x)=\frac{-6\sin(x)\cdot\left(1+\cos(x)\right)}{\left(2-\cos(x)\right)^3}=0$ Hinweis: Wenn möglich, sollte der Zähler als Produkt dargestellt werden. $\Rightarrow -6\sin(x)\cdot\left(1+\cos(x)\right)\Leftrightarrow (1)\ -6\sin(x)=0 \quad\vee\ (2)\ 1+\cos(x)=0$ $(1)\Rightarrow \sin(x)=0\Rightarrow x_{W_1}=0\ ;\ x_{W_2}=\pi\ ;\ x_{W_3}=2\pi\ ;\ x_{W_4}=-\pi$ $(2)\Rightarrow \cos(x)=-1\Rightarrow x_{W_2}=\pi\ ;\ x_{W_4}=-\pi$ $f'''(x)=6\cdot\frac{\cos^3(x)-\cos^2(x)-2\cos(x)+5\sin^2(x)+2\sin^2(x)\cdot\cos(x)}{\left(2-\cos(x)\right)^4}$ $f'''(0)=6\cdot\frac{\cos^3(0)-\cos^2(0)-2\cos(0)+5\sin^2(0)+2\sin^2(0)\cdot\cos(0)}{\left(2-\cos(0)\right)^4}$ $=6\cdot\frac{1-1-2+0+0}{2-1}=\frac{6\cdot(-2)}{1}=-12\neq 0\Rightarrow x_{W_1}$ ist Wendestelle; $f(0)=\frac{3\cdot\sin(0)}{2-\cos(0)}=\frac{0}{2-1}=0\Rightarrow\quad W_1(0\ ;\ 0)$ $f'''(\pi)=6\cdot\frac{\cos^3(\pi)-\cos^2(\pi)-2\cos(\pi)+5\sin^2(\pi)+2\sin^2(\pi)\cdot\cos(\pi)}{\left(2-\cos(\pi)\right)^4}$ $=6\cdot\frac{-1+1+2+0+0}{(2+1)^4}=6\cdot\frac{2}{81}=\frac{4}{27}\neq 0\Rightarrow x_{W_2}$ ist Wendestelle; $f(\pi)=\frac{3\cdot\sin(\pi)}{2-\cos(\pi)}=\frac{0}{2+1}=0\Rightarrow\quad W_2(\pi\ ;\ 0)$ $f'''(2\pi)=6\cdot\frac{\cos^3(2\pi)-\cos^2(2\pi)-2\cos(2\pi)+5\sin^2(2\pi)+2\sin^2(2\pi)\cdot\cos(2\pi)}{\left(2-\cos(2\pi)\right)^4}$ $=6\cdot\frac{1-1-2+0+0}{(2-1)^4}=-12\neq 0\Rightarrow x_{W_3}$ ist Wendestelle; $f(2\pi)=\frac{3\cdot\sin(2\pi)}{2-\cos(2\pi)}=\frac{0}{2-1}=0\Rightarrow\quad W_3(2\pi\ ;\ 0)$

	Sattelpunkte: *f'(x_s) = 0 und f''(x_s) =0*	$f'''(-\pi) = 6\cdot\dfrac{\cos^3(-\pi)-\cos^2(-\pi)-2\cos(-\pi)+5\sin^2(-\pi)+2\sin^2(-\pi)\cdot\cos(-\pi)}{(2-\cos(-\pi))^4}$ $= 6\cdot\dfrac{-1+1+2+0+0}{(2+1)^4} = \dfrac{4}{27} \neq 0 \Rightarrow x_{W4}$ ist Wendestelle; $f(-\pi) = \dfrac{3\cdot\sin(-\pi)}{2-\cos(-\pi)} = \dfrac{0}{2-1} = 0 \Rightarrow \quad W_4(-\pi\,;\,0)$ $f''(x)=0$ und $f'(x)=0$ liefert keine gemeinsamen Lösungen (siehe Extremstellen und Wendestellen) $\Rightarrow$ keine Sattelpunkte
6.	Asymptoten Polasymptoten x_p: x_p ist eine Polstelle $\lim\limits_{\substack{l.:\\r.:}\,x\to x_p}(f(x)) = \pm\infty$ (Ersatzfolge!) sonstige Asymptoten a(x): $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)) = a(x)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-a(x)] = 0$	nicht vorhanden, da keine Definitionslücken (Hinweis: Winkelfunktionen mit Polasymptoten werden in der Schule i.a. nicht untersucht, da die Grenzwertbestimmung mittels Ersatzfolgen mit Mitteln der Schulmathematik meist nicht möglich ist.)
7.	Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches	$\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} = \dfrac{3\sin(2\pi)}{2-\cos(2\pi)} = \dfrac{3\cdot 0}{2-1} = 0$ $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{3\sin(x)}{2-\cos(x)} = \dfrac{3\sin(-\pi)}{2-\cos(-\pi)} = \dfrac{3\cdot 0}{2-1} = 0$
8.	Schnittpunkte mit der Ordinate: *f(0) bilden*	$f(0) = \dfrac{3\sin(0)}{2-\cos(0)} = \dfrac{0}{2-1} = 0 \Rightarrow P(0\,;\,0)$
9.	Symmetrie *achsensymmetrisch zur Ordinate: f(x) = f(-x)* *zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung: f(x) = - f(-x) bzw. - f(x) = f(-x)*	$f(x) = f(-x) \Leftrightarrow \dfrac{3\cdot\sin(x)}{2-\cos(x)} \neq \dfrac{3\cdot\sin(-x)}{2-\cos(-x)} = \dfrac{-3\cdot\sin(x)}{2-\cos(-x)}$ (mit $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$) $\Rightarrow$ nicht axialsymmetrisch zur Ordinate $-f(x) = f(-x) \Leftrightarrow \dfrac{-3\cdot\sin(x)}{2-\cos(x)} = \dfrac{3\cdot\sin(-x)}{2-\cos(-x)} = \dfrac{-3\cdot\sin(x)}{2-\cos(x)}$ $\Rightarrow$ zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung
10	Monotonie *monoton steigend:* *f´(x)≥ 0* *monoton fallend:* *f´(x)≤ 0*	$f'(x) = \dfrac{6\cos(x)-3}{(2-\cos(x))^2}$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 1. \quad 6\cos(x)-3 \geq 0 \ \wedge\ (2-\cos(x))^2 \geq 0$ $2. \quad 6\cos(x)-3 \leq 0 \ \wedge\ (2-\cos(x))^2 \leq 0 \Rightarrow$ n.d. $6\cos(x) \geq 3 \qquad 2-\cos(x) \geq 0$ oder $2-\cos(x) \leq 0$ $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2} \qquad \cos(x) \leq 2 \qquad \cos(x) \geq 2$ n.d. $\underbrace{-\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{3} \ \wedge\ \dfrac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi}_{\text{monoton steigend}} \qquad x \in R$

		$f'(x) \le 0 \Rightarrow 1.\quad 6\cos(x) - 3 \ge 0 \;\wedge\; \left(2-\cos(x)\right)^2 \le 0 \Rightarrow$ n.d. $2.\quad 6\cos(x) - 3 \le 0 \;\wedge\; \left(2-\cos(x)\right)^2 \ge 0 \Rightarrow$ $6\cos(x) \le 3 \qquad 2-\cos(x) \ge 0$ oder $2-\cos(x) \le 0$ $\cos(x) \le \frac{1}{2} \qquad \cos(x) \le 2 \qquad \cos(x) \ge 2$ n.d. $\underbrace{-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} \;\wedge\; \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}}_{\text{monoton fallend}} \qquad x \in R$
11	Wertebereich	$-\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\;;\; y \in R$
12	Graph