Funktionsuntersuchung und Anwendungen einer einfachen gebrochen rationalen Parameterfunktion

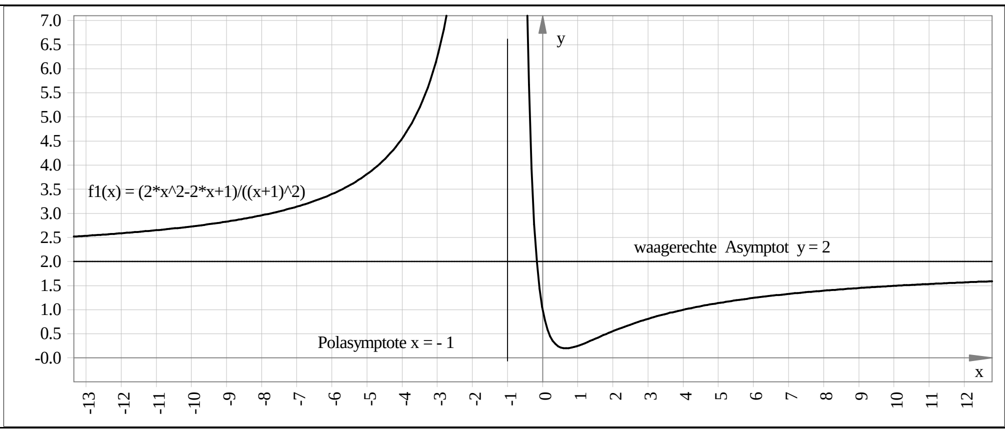
Aufgabe: a) Führen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ eine vollständige Funktionsdiskussion durch.

b) Stellen Sie die Gleichungen der Kurventangenten t_1 und t_2 auf ,die in den Kurvenpunkten A (0|1) und B (4|1) an den Graphen G_f gelegt werden können.
Die Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt C .Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C.
Zeigen Sie ,dass die Flächenmaßzahl des Dreiecks ABC $\frac{16}{13}$ beträgt.

a) vollständige Funktionsdiskussion:

	allgemein	auf Beispiel bezogen
1.	Definitionsbereich $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $u(x) = 0$ *für* $v(x) \neq 0$	$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \quad \underline{D = R \setminus \{-1\}}$
2.	Asymptoten Polasymptoten x_p: x_p ist eine Polstelle $\lim\limits_{\substack{l.: \\ r.:} x \to x_p} (f(x)) = \pm\infty$ (Ersatzfolge!)	$\lim\limits_{r.: x \to -1} \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(-1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{\left(-1 + \frac{1}{n} + 1\right)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 2 - \frac{2}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}}$ $= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} n^2 \left(5 - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \infty(5 - 0 + 0) = \underline{\underline{+\infty}}$ $\lim\limits_{l.: x \to -1} \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(-1 - \frac{1}{n}\right) + 1}{\left(-1 + \frac{1}{n} + 1\right)^2}$ $= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 2 + \frac{2}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}}$ $= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + 2 + \frac{2}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$ $= \lim\limits_{n \to \infty} n^2 \left(5 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \infty(5 + 0 + 0) = \underline{\underline{+\infty}}$
	sonstige Asymptoten a(x): $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x)) = a(x)$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - a(x)] = 0$ *(Hinweis: zur Bestimmung Polynomdivision gut geeignet)* Beachte: wenn $f(x) = \frac{u^n(x)}{v^m(x)}$ dann 1. a(x) =0 (Abszisse) wenn n < m 2. a (x) = konst. (waagerechte	$(2x^2 - 2x + 1) \div (x^2 + 2x + 1) = 2 + \frac{-6x - 1}{x^2 + 2x + 1} \quad \Rightarrow \quad a_1(x) = \frac{-6x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ $\frac{-(2x^2 + 4x + 2)}{-6x - 1}$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - a_1(x)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{-6x - 1}{x^2 + 2x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 1}\right)$ $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 2x + 1}\right) = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{a_1(x) \text{ für } x \to \pm\infty \text{ keine Asymptote}}$

	Asymptote) wenn n = m 3. a (x) = t · x + c (schräge Asymptote) wenn n = m + 1	$\lim_{r.u.l.::x\to -1}\left(f(x)-a_1(x)\right)=\lim_{r.u.l.::x\to -1}\left(\frac{2\left(x^2+2x+1\right)}{x^2+2x+1}\right)=2\neq 0$ $\Rightarrow\ a_1(x)$ für $\underset{x>0\vee x<0}{x\to -1}$ keine Asymptote $a_1(x)=f(x)-2\Rightarrow$ um -2 verschobene $f(x)$ y = 2 als waagerechte Asymptote bei lim für $x\to\pm\infty$ nachgewiesen
2.	Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches	$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x+1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ $=\frac{2-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=\underline{2}$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{2+0+0}{1-0+0}=\underline{2}$
3.	<u>Nullstellen</u> $f(x)=0$ $\Rightarrow u(x)=0$ *und* $v(x)\neq 0$ Schnittpunkte mit der Abszisse	$2x^2-2x+1=0\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{2}=0$ $x_{0_{1;2}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}\Rightarrow$ n.d. $\Rightarrow$ keine Nullstellen
4.	<u>Schnittpunkte mit der Ordinate</u>: *f(0) bilden*	$f(0)=\frac{2\cdot 0^2-2\cdot 0+1}{(0+1)^2}=1\Rightarrow \underline{S_y(0\|1)}$
5.	<u>Symmetrie</u> *achsensymmetrisch zur Ordinate: f(x) = f(-x)* *zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung: f(x) = - f(-x) bzw. - f(x) = f(-x)*	$f(x)=f(-x)$ $\frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}=\frac{2\cdot(-x)^2-2\cdot(-x)+1}{(-x+1)^2}$ $\frac{2x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\neq\frac{2x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\Rightarrow$ nicht axialsymmetrisch zur Ordinate $-f(x)=f(-x)$ $\frac{-2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}\neq\frac{2x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\Rightarrow$ nicht zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung
	Die ersten drei Ableitungen der Funktion werden für die folgenden Betrachtungen benötigt $f'(x)=\frac{(4x-2)\cdot(x+1)^2-\left(2x^2-2x+1\right)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(4x-2)\cdot(x+1)-\left(2x^2-2x+1\right)\cdot 2}{(x+1)^3}$ $f'(x)=\frac{4x^2-2x+4x-2-4x^2+4x-2}{(x+1)^3}=\underline{\frac{6x-4}{(x+1)^3}}\quad\left(\text{bzw.: }\frac{6x^2+2x-4}{(x+1)^4}\Rightarrow\text{sehr ungünstig}\right)$ $f''(x)=\frac{6(x+1)^3-(6x-4)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{6(x+1)-(6x-4)\cdot 3}{(x+1)^4}$ $f''(x)=\frac{6x+6-18x+12}{(x+1)^4}=\underline{\frac{-12x+18}{(x+1)^4}}$	

	$f'''(x)=\frac{-12\cdot(x+1)^4-(-12x+18)\cdot 4\cdot(x+1)^3}{(x+1)^8}=\frac{-12\cdot(x+1)-(-12x+18)\cdot 4}{(x+1)^5}$ $f'''(x)=\frac{-12x-12+48x-72}{(x+1)^5}=\underline{\frac{36x+84}{(x+1)^5}}$	
6.	<u>Extrempunkte</u> *Extremstellen:* *notwendige Bedingung:* *f´(x) = 0* *hinreichende Bedingung:* *f``(x) ≤ 0 ⇒ Max.* *f``(x) ≥ 0 ⇒ Min.* *Extrempunkte:* *E (xE ; f(xE))*	$f'(x_E)=0 \Leftrightarrow 6x_E-4=0$ $x_E=\frac{2}{3}$ $f''\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-8+18}{\left(\frac{5}{3}\right)^4}=\frac{10\cdot 3^4}{5^4}>0 \Rightarrow$ Minimum $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\frac{2\cdot 4}{9}-\frac{2\cdot 2}{3}+1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\frac{8-12+9}{9}}{\frac{25}{9}}=\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25}=\frac{1}{5} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right)}$
7.	<u>Wendepunkte</u> *notwendige Bedingung:* *f``(xw) = 0* *hinreichende Bedingung:* *f```(xw) ≠ 0* <u>Sattelpunkte:</u> *f``(xs) = 0 und f´(xs) =0*	$-12x+18=0 \Rightarrow \underline{x_W=\frac{3}{2}}$ $f'''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{36\cdot\frac{3}{2}+84}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^5}=\frac{54+84}{\left(\frac{5}{2}\right)^5}=\frac{138}{\left(\frac{5}{2}\right)^5}\neq 0 \Rightarrow x_W$ ist Wendestelle $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}+1}{(\frac{3}{2}+1)^2}=\frac{\frac{9}{2}-3+1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{25}=\frac{2}{5} \Rightarrow$ Wendepunkt : $\underline{W\left(\frac{3}{2}\Big\vert\frac{2}{5}\right)}$ $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{6\cdot\frac{3}{2}-4}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^3}=\frac{9-4}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}=\frac{5}{\frac{125}{8}}=\frac{40}{125}\neq 0 \Rightarrow$ kein Sattelpunkt
8.	Monotonie *monoton steigend:* *f´(x)≥ 0* *monoton fallend:* *f´(x)≤ 0*	Wird fast nie mehr berechnet, sondern durch Ablesen bestimmt (Ausnahme bei einfachsten Lösungsmöglichkeiten). $x<-1;\ \frac{2}{3}<x<\infty;\ x\in R$ $-1<x<\frac{2}{3};\ x\in R$
9.	Wertebereich	WB: $y\in R;\ y>0$
10	Graph	

b)

Tangenten an $f(x)$

$A(0;1)$

$f'(0) = -4$

$t_1(x) = -4x + n_1$

$1 = n_1$

$\underline{\underline{t_1(x) = -4x + 1}}$

$B(4;1)$

$f'(4) = \frac{24-4}{(4+1)^3} = \frac{20}{75} = \frac{4}{25}$

$t_2(x) = \frac{4}{25}x + n_2$

$1 = \frac{4}{25} \cdot 4 + n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{9}{25}$

$\underline{\underline{t_2(x) = \frac{4}{25}x + \frac{9}{25}}}$

Schnittpunkt der Tangenten

$$-4x + 1 = \frac{4}{25}x + \frac{9}{25}$$

$$-\frac{104}{25}x = -\frac{16}{25}$$

$$x = \frac{16}{104} = \frac{2}{13} \quad t_1\left(\frac{2}{13}\right) = -\frac{8}{13} + 1 = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C\left(\frac{2}{13};\frac{5}{13}\right)}}$$

Flächeninhalt des ΔABC:

$$A = \frac{g \cdot h_g}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \left|\left(y_{\overline{AB}} - y_C\right)\right|}{2} = \frac{4 \cdot \left|1 - \frac{5}{13}\right|}{2} = \frac{4 \cdot \frac{8}{13}}{2} = \underline{\underline{\frac{16}{13}\text{ FE}}} = 1{,}23\text{ FE}$$