

Funktionsuntersuchung einer gebrochenrationalen Parameterfunktion am Beispiel

Aufgabe: Führen Sie für die Funktion $f_a(x) = \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1}$ mit $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ eine vollständige Funktionsdiskussion durch.

	allgemein	auf Beispiel bezogen
1.	<p>Definitionsbereich</p> $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ <p>$u(x) = 0$ für $v(x) \neq 0$</p>	<p>$DB: ax^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{a}}$</p> <p>$\Rightarrow$ wenn $a > 0$: $-\frac{1}{a}$ stets negativ \Rightarrow n.d.</p> <p>\Rightarrow wenn $a < 0$: $-\frac{1}{a}$ stets positiv $\Rightarrow x_p = \pm \sqrt{-\frac{1}{a}}$</p> <p>$\Rightarrow DB: \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{für } x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}; x \neq \pm \sqrt{-\frac{1}{a}} & \text{für } a < 0 \end{cases}$</p>
2.	<p>Asymptoten</p> <p>Polasymptoten x_p: x_p ist eine Polstelle $\lim_{\substack{l.: \\ r.:}} (f(x)) = \pm\infty$ $\left. \begin{matrix} l.: \\ r.: \end{matrix} \right\} x \rightarrow x_p$ (Ersatzfolge!)</p>	<p>für $a > 0$ keine Definitionslücken \Rightarrow keine Polasymptoten</p> <p>für $a < 0$:</p> <p><u>von links</u>: Ersatzfolge: $x = \sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}}$</p> $\lim_{l.: x \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{a}}} \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \left(\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}} \right)}{a \cdot \left(\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}} \right)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}}}{a \cdot \left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} \right) + 1}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-\frac{a^2}{a} - \frac{a}{n}}}{-1 - \frac{2a}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{a}{n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{-a} - a}{-2 \cdot n \cdot \sqrt{-a} + a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n \cdot \sqrt{-a} - a)}{-2 \cdot n \cdot \sqrt{-a} + a}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n \cdot \sqrt{-a} - a)}{n \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-a} + \frac{a}{n} \right)} = \frac{\infty - a}{-2 \cdot \sqrt{-a} - 0} = \frac{\infty}{-2 \cdot \sqrt{-a}} = -\infty \quad (-2 \cdot \sqrt{-a} \text{ ist negativ})$ <p><u>von rechts</u>: Ersatzfolge: $x = \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}}$</p> $\lim_{r.: x \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{a}}} \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \left(\sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}} \right)}{a \cdot \left(\sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}} \right)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}}}{a \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} \right) + 1}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-\frac{a^2}{a} + \frac{a}{n}}}{-1 + \frac{2a}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{a}{n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{-a} - a}{2 \cdot n \cdot \sqrt{-a} + a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n \cdot \sqrt{-a} - a)}{2 \cdot n \cdot \sqrt{-a} + a}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n \cdot \sqrt{-a} - a)}{n \cdot \left(2 \cdot \sqrt{-a} + \frac{a}{n} \right)} = \frac{\infty - a}{2 \cdot \sqrt{-a} - 0} = +\infty$ <p><u>von links</u>: Ersatzfolge: $x = -\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}}$</p>

$$\begin{aligned} \lim_{l: x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{a}}} \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \left(-\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}} \right)}{a \cdot \left(-\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}} \right)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}}}{a \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} \right) + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{-\frac{a^2}{a} - \frac{a}{n}}}{-1 + \frac{2a}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n \cdot \sqrt{-a - a}}{+2 \cdot n \cdot \sqrt{-a + a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-n \cdot \sqrt{-a - a})}{2 \cdot n \cdot \sqrt{-a + a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-n \cdot \sqrt{-a - a})}{n \cdot \left(2 \cdot \sqrt{-a} + \frac{a}{n} \right)} = \frac{-\infty - a}{2 \cdot \sqrt{-a} - 0} = \frac{\infty}{2 \cdot \sqrt{-a}} = \infty \quad (2 \cdot \sqrt{-a} \text{ ist positiv}) \end{aligned}$$

von rechts: Ersatzfolge: $x = -\sqrt{-\frac{1}{a} - \frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} \lim_{r: x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{a}}} \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \left(-\sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}} \right)}{a \cdot \left(-\sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}} \right)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n}}}{a \cdot \left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} \right) + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{-\frac{a^2}{a} + \frac{a}{n}}}{-1 - \frac{2a}{n} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n \cdot \sqrt{-a + a}}{-2 \cdot n \cdot \sqrt{-a + a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-n \cdot \sqrt{-a + a})}{-2 \cdot n \cdot \sqrt{-a + a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-n \cdot \sqrt{-a - a})}{n \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-a} + \frac{a}{n} \right)} = \frac{-\infty - a}{-2 \cdot \sqrt{-a} - 0} = \frac{\infty}{-2 \cdot \sqrt{-a}} = -\infty \quad (-2 \cdot \sqrt{-a} \text{ ist negativ}) \end{aligned}$$

siehe Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches bei waagerechter Asymptote!

sonstige Asymptoten $a(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - a(x))$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - a(x)] = 0$$

(Hinweis: zur Bestimmung Polynomdivision gut geeignet)

Beachte:

$$\text{wenn } f(x) = \frac{u^n(x)}{v^m(x)}$$

dann

1. $a(x) = 0$ (Abszisse)
wenn $n < m$
2. $a(x) = \text{konst.}$
(waagerechte Asympt.)
wenn $n = m$
3. $a(x) = m \cdot x + n$
(schräge Asymptote)
wenn $n = m + 1$

Polynomdivision in diesem Beispiel nicht möglich, da der Grad des Nennerpolynoms größer als der Grad des Zählerpolynoms ist.

3.	Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches	<p><u>Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$:</u></p> $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a x}{a x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \frac{a}{x}}{x^2 \left(a + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{a}{x}}{a + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{a + 0} = 0$ <p>\Rightarrow waagerechte Asymptote $y = 0$ (x-Achse)</p>
4.	<u>Nullstellen</u> $f(x) = 0$ $\Rightarrow u(x) = 0$ und $v(x) \neq 0$ Schnittpunkte mit der Abszisse	<u>Nullstellen:</u> $a x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ - unabhängig von der Wahl des Parameters.
5.	<u>Schnittpunkte mit der Ordinate:</u> $f(0)$ bilden	$f_a(x) = \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow S(0;0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ - unabhängig von der Wahl des Parameters.
6.	<u>Symmetrie</u> achsensymmetrisch zur Ordinate: $f(x) = f(-x)$ zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung: $f(x) = -f(-x)$ bzw. $-f(x) = f(-x)$	$f_a(x) = f_a(-x) \Leftrightarrow \frac{a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} \neq \frac{-a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1}$ \Rightarrow nicht axialsymmetrisch zur Ordinate $-f_a(x) = f_a(-x) \Leftrightarrow \frac{-a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1} = \frac{-a \cdot x}{a \cdot x^2 + 1}$ \Rightarrow zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung
<p>Die ersten drei Ableitungen der Funktion werden für die folgenden Betrachtungen benötigt</p> <p><u>1. Ableitung:</u></p> $f_a'(x) = \frac{a \cdot (a \cdot x^2 + 1) - a \cdot x \cdot 2 a x}{(a x^2 + 1)^2} = \frac{a^2 x^2 + a - 2 a^2 x^2}{(a x^2 + 1)^2} = \frac{-a^2 x^2 + a}{(a x^2 + 1)^2} = \frac{-a \cdot (a x^2 - 1)}{(a x^2 + 1)^2}$ <p><u>2. Ableitung:</u></p> $f_a''(x) = \frac{-2 a^2 x \cdot (a x^2 + 1)^2 - (-a^2 x^2 + a) \cdot 2 \cdot (a x^2 + 1) \cdot 2 a x}{(a x^2 + 1)^4}$ $= \frac{-2 a^2 x \cdot (a x^2 + 1) - 4 a x \cdot (-a^2 x^2 + a)}{(a x^2 + 1)^3} = \frac{-2 a^3 x^3 - 2 a^2 x + 4 a^3 x^3 - 4 a^2 x}{(a x^2 + 1)^3}$ $= \frac{2 a^3 x^3 - 6 a^2 x}{(a x^2 + 1)^3} = \frac{2 a^2 x \cdot (a x^2 - 3)}{(a x^2 + 1)^3}$ <p><u>3. Ableitung:</u></p> $f_a'''(x) = \frac{(6 a^3 x^2 - 6 a^2) \cdot (a x^2 + 1)^3 - (2 a^3 x^3 - 6 a^2 x) \cdot 3 (a x^2 + 1)^2 \cdot 2 a x}{(a x^2 + 1)^6}$ $= \frac{(6 a^3 x^2 - 6 a^2) \cdot (a x^2 + 1) - (2 a^3 x^3 - 6 a^2 x) \cdot 6 a x}{(a x^2 + 1)^4}$ $= \frac{6 a^4 x^4 - 6 a^3 x^2 + 6 a^3 x^2 - 6 a^2 - 12 a^4 x^4 + 36 a^3 x^2}{(a x^2 + 1)^4} = \frac{-6 a^4 x^4 - 30 a^3 x^2 - 6 a^2}{(a x^2 + 1)^4}$		

<p>7. Monotonie</p> <p>monoton steigend: $f(x) \geq 0$</p> <p>monoton fallend: $f(x) \leq 0$</p>	$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-a \cdot (ax^2 - 1)}{(ax^2 + 1)^2} > 0$ <p>\Rightarrow Nenner stets positiv $(ax^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow$ Zähler bestimmt Vorzeichen</p> <p><u>Fall 1: $a > 0$</u></p> $\Rightarrow -a \cdot (ax^2 - 1) > 0 \Rightarrow ax^2 - 1 < 0 \Rightarrow ax^2 < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{a}} \wedge x > -\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\Rightarrow \text{monoton steigend: } -\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}; x \in \mathbb{R} \text{ wenn } a > 0$ <p><u>Fall 2: $a < 0$</u></p> $\Rightarrow -a \cdot (ax^2 - 1) > 0 \Rightarrow ax^2 - 1 > 0 \Rightarrow ax^2 > 1 \Rightarrow \text{für } a < 0 \text{ stets falsche Aussage}$ <p>\Rightarrow <u>$f(x)$ für $a < 0$ niemals monoton steigend</u></p> $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-a \cdot (ax^2 - 1)}{(ax^2 + 1)^2} < 0$ <p>\Rightarrow Nenner stets positiv $(ax^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow$ Zähler bestimmt Vorzeichen</p> <p><u>Fall 1: $a > 0$</u></p> $\Rightarrow -a \cdot (ax^2 - 1) < 0 \Rightarrow ax^2 - 1 > 0 \Rightarrow ax^2 > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{a}} \wedge x < -\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\Rightarrow \text{monoton fallend: } \frac{1}{\sqrt{a}} > x > -\frac{1}{\sqrt{a}}; x \in \mathbb{R} \text{ wenn } a > 0$ <p><u>Fall 2: $a < 0$</u></p> $\Rightarrow -a \cdot (ax^2 - 1) < 0 \Rightarrow ax^2 - 1 < 0 \Rightarrow ax^2 < 1 \Rightarrow \text{für } a < 0 \text{ stets wahre Aussage}$ <p>\Rightarrow <u>$f(x)$ für $a < 0$ stets monoton fallend</u></p>
<p>8. <u>Extrempunkte</u></p> <p>Extremstellen: notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$</p> <p>hinreichende Bedingung: $f''(x) \leq 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $f''(x) \geq 0 \Rightarrow \text{Min.}$</p> <p>Extrempunkte: $E(x_E; f(x_E))$</p>	$f'(x) = \frac{-a(ax^2 - 1)}{(ax^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -a(ax^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 1 \Rightarrow x_{E_{1,2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$ $f''\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\frac{2a^3}{a\sqrt{a}} - \frac{6a^2}{\sqrt{a}}}{\left(\frac{a}{a} + 1\right)^3} = \frac{\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{6a^2}{\sqrt{a}}}{\left(\frac{a}{a} + 1\right)^3} = \frac{-4a^2}{8} = -\frac{a^2}{2\sqrt{a}} < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\frac{2a^3}{-a\sqrt{a}} - \frac{6a^2}{-\sqrt{a}}}{\left(\frac{a}{a} + 1\right)^3} = \frac{-\frac{2a^2}{\sqrt{a}} + \frac{6a^2}{\sqrt{a}}}{\left(\frac{a}{a} + 1\right)^3} = \frac{4a^2}{8} = \frac{a^2}{2\sqrt{a}} > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ <p><u>für $a < 0$ keine Extremwerte, da $\frac{1}{\sqrt{a}}$ nicht definiert</u></p> $f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}}{a \cdot \frac{1}{a} + 1} = \frac{\frac{a\sqrt{a}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a} \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a \cdot \frac{-1}{\sqrt{a}}}{a \cdot \frac{1}{a} + 1} = \frac{\frac{-a\sqrt{a}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{a}$ $\Rightarrow \underline{\underline{H\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{2}\sqrt{a}\right)}}; \underline{\underline{T\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; -\frac{1}{2}\sqrt{a}\right)}}$

<p>9. <u>Wendepunkte</u></p> <p>notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$</p> <p>hinreichende Bedingung: $f'''(x_w) \neq 0$</p> <p><u>Sattelpunkte:</u> $f'(x_s) = 0$ und $f''(x_s) = 0$</p>	$f''(x) = \frac{2a^3 x^3 - 6a^2 x}{(ax^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2a^3 x^3 - 6a^2 x = 0 \Leftrightarrow 2a^2 x(ax^2 - 3) = 0$ $ax^2 - 3 = 0 \vee 2a^2 x = 0$ $ax^2 = 3 \quad x_{W_3} = 0$ $x_{W_1} = \sqrt{\frac{3}{a}}; x_{W_2} = -\sqrt{\frac{3}{a}}$ $f''' \left(\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{6a^4 \cdot 9 - 30a^3 \cdot 3 - 6a^2}{\left(\frac{a \cdot 3}{a} + 1 \right)^4} = \frac{-36a^2 - 90a^2 - 6a^2}{4^4} = \frac{-132a^2}{256} = -\frac{33a^2}{64} \neq 0$ $f''' \left(-\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{6a^4 \cdot 9 - 30a^3 \cdot 3 - 6a^2}{\left(\frac{a \cdot 3}{a} + 1 \right)^4} = \frac{-36a^2 - 90a^2 - 6a^2}{4^4} = \frac{-132a^2}{256} = -\frac{33a^2}{64} \neq 0$ $f'''(0) = \frac{-6a^2}{1} = -6a^2 \neq 0$ <p>für $a < 0$ keine Wendestelle, da $\sqrt{\frac{3}{a}}$ nicht definiert</p> <hr/> $f \left(\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{a \sqrt{\frac{3}{a}}}{a \cdot \frac{3}{a} + 1} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3a^2}{a}} = \frac{1}{4} \sqrt{3a}; f \left(-\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{-a \sqrt{\frac{3}{a}}}{a \cdot \frac{3}{a} + 1} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3a^2}{a}} = -\frac{1}{4} \sqrt{3a};$ $f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{W_1 \left(\sqrt{\frac{3}{a}}; \frac{1}{4} \sqrt{3a} \right); W_2 \left(-\sqrt{\frac{3}{a}}; -\frac{1}{4} \sqrt{3a} \right); W_3(0;0)}}$ $f'_a \left(\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{-a \cdot \left(a \cdot \frac{3}{a} - 1 \right)}{\left(a \cdot \frac{3}{a} + 1 \right)^2} = \frac{-2 \cdot a}{16} \neq 0; f'_a \left(-\sqrt{\frac{3}{a}} \right) = \frac{-a \cdot \left(a \cdot \frac{3}{a} - 1 \right)}{\left(a \cdot \frac{3}{a} + 1 \right)^2} = \frac{-2 \cdot a}{16} \neq 0$ $f'_a(0) = \frac{-a \cdot (a \cdot 0 - 1)}{(a \cdot 0 + 1)^2} = \frac{a}{1} \neq 0 \Rightarrow \text{keine Sattelpunkte}$
<p>10 Ortskurven</p>	<p><u>Ortskurveder Extrempunkte:</u></p> $\left. \begin{aligned} H \left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{2} \sqrt{a} \right) &\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{a} \wedge x = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{x} \\ y_H &= \frac{1}{2x} \\ T \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; -\frac{1}{2} \sqrt{a} \right) &\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \sqrt{a} \wedge x = -\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a} = -\frac{1}{x} \\ y_T &= \frac{1}{2x} \end{aligned} \right\}$ <p>H und T liegen in diesem Beispiel auf einer Ortskurve $\underline{\underline{y_E = \frac{1}{2x}}}$</p>

		<p><u>Ortskurve der Wendepunkte:</u></p> $W_1\left(\sqrt{\frac{3}{a}}; \frac{1}{4}\sqrt{3a}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{4}\sqrt{3a} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{a} \wedge x = \sqrt{\frac{3}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{3}}{x}$ $y_{W_1} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{3}{4x}$ $W_2\left(-\sqrt{\frac{3}{a}}; \frac{1}{4}\sqrt{3a}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}\sqrt{3a} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{a} \wedge x = -\sqrt{\frac{3}{a}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a} = -\frac{\sqrt{3}}{x}$ $y_{W_2} = -\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{3}{4x}$ <p><u>gemeinsame Ortskurve von zwei Wendepunkten:</u> $y_W = \frac{3}{4x}$</p> <p>$W_3(0;0) \Rightarrow$ keine Ortskurve</p>
11	Wertebereich	WB: $y \in \mathbb{R}$

