Funktionsuntersuchung einer ganzrationalen Funktion am Beispiel

Aufgabe: Führen Sie für die Funktion $f(x)=\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3$ eine vollständige Funktionsdiskussion durch.

	allgemein	auf Beispiel bezogen
1.	Definitionsbereich	DB: $x \in R$
2.	Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{18}x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{54}{x^3}\right)$ $=\frac{1}{18}\cdot\infty\cdot(1-0-0-0)=\underline{\infty}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{18}x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{54}{x^3}\right)$ $=\frac{1}{18}\cdot(-\infty)\cdot(1-0+0-0)=\underline{-\infty}$
3.	<u>Nullstellen</u> $f(x_0)=0$ Schnittpunkte mit der Abszisse	$f(x)=0\Rightarrow\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3=0$ kein allgemeingültiges Verfahren $\Rightarrow$ Probieren: $x_{0_1}=3$ Nachweis: $f(3)=\frac{1}{18}\cdot27-\frac{1}{3}\cdot9-\frac{1}{2}\cdot3+3=\frac{3}{2}-3-\frac{3}{2}+3=0$ Zurückführung auf quadratische Gelichung $\Rightarrow$ Polynomdivision $\left(\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3\right)\div(x-3)=\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{6}x-1$ $\underline{-\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{6}x^2\right)}$ $-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+3$ $\underline{-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x\right)}$ $-x+3$ $\underline{-(-x+3)}$ 0 Lösung der quadratischen Gleichung: $\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{6}x-1=0\Rightarrow$ Normalform: $x^2-3x-18=0$ $x_{0_{2,3}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+18}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{9}{2}$ $x_{0_2}=-3\ ;\ x_{0_3}=6$ Pr*obe*: $f(-3)=\frac{1}{18}\cdot(-27)-\frac{1}{3}\cdot9-\frac{1}{2}\cdot(-3)+3=-\frac{3}{2}-3+\frac{3}{2}+3=0$ $f(6)=\frac{1}{18}\cdot126-\frac{1}{3}\cdot36-\frac{1}{2}\cdot6+3=-12-12-3+3=0$ $\Rightarrow$ *drei Nullstellen*: $\underline{x_{0_1}=3\ ;\ x_{0_2}=-3\ ;\ x_{0_3}=6}$ $\Rightarrow$ *Schnittpunkte mit der Abszisse*: $N_1(3\ ;\ 0)\ ;\ N_2(-3\ ;\ 0)\ ;\ N_3(6\ ;\ 0)$
4.	<u>Schnittpunkte mit der Ordinate</u>: *f(0) bilden*	$x=0\Rightarrow f(0)=0-0-0+3=3\Rightarrow\underline{P_y(0\ ;\ 3)}$

5.	Symmetrie *achsensymmetrisch zur Ordinate: f(x) = f(-x)* *zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung:* *f(x) = - f(-x)* *bzw. - f(x) = f(-x)*	$f(-x)= f(x)$ $\frac{1}{18}\cdot(-x)^3-\frac{1}{3}\cdot(-x)^2-\frac{1}{2}\cdot(-x)+3=\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3$ $-\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+3\neq\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3$ $\Rightarrow$ nicht symmetrisch zur Ordinate $f(x)=-f(-x)$ $\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3=-\left(\frac{1}{18}\cdot(-x)^3-\frac{1}{3}\cdot(-x)^2-\frac{1}{2}\cdot(-x)+3\right)$ $\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3=-\left(-\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+3\right)$ $\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-3$ $\Rightarrow$ nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung
	Die ersten drei Ableitungen der Funktion werden für die folgenden Betrachtungen benötigt $f'(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\ ;\ f''(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\ ;\ f'''(x)=\frac{1}{3}$	
6.	Monotonie *monoton steigend:* *f´(x)≥ 0* *monoton fallend:* *f´(x)≤ 0*	$f'(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\left(x^2-4x-3\right)=\frac{1}{6}\cdot\left[(x-2)^2-7\right]$ folgt aus quadratischer Ergänzung: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ $x^2-4x-3=x^2-4x+4-4-3=(x-2)^2-7$ $a=x\ ;\ 2ab=4x\Rightarrow b=2\Rightarrow b^2=4$ $m.\ st.:\ \frac{1}{6}\cdot\left[(x-2)^2-7\right]\geq 0\qquad m.\ f.:\ \frac{1}{6}\cdot\left[(x-2)^2-7\right]\leq 0$ $\frac{1}{6}>0\ gilt\ stets$ $\Rightarrow\quad (x-2)^2\geq 7\qquad (x-2)^2\leq 7$ $x-2\geq\sqrt{7}\qquad x-2\leq\sqrt{7}$ $x\geq 2+\sqrt{7}\approx 4{,}64\ ;\ x\geq 2-\sqrt{7}\approx -0{,}65\qquad x\leq 2+\sqrt{7}\ ;\ x\leq 2-\sqrt{7}$ $f(4{,}64)=-0{,}95\quad f(-0{,}65)=3{,}17\qquad f(4{,}64)=-0{,}95\quad f(-0{,}65)=3{,}17$ $f(5)=-0{,}88\quad f(-0{,}5)=3{,}16\qquad f(4{,}5)=-0{,}94\quad f(-1)=3{,}11$ $f(6)=0\quad f(0)=3\qquad f(4)=-0{,}78\quad f(-2)=2{,}22$ $m.st.\quad m.\ f.\qquad m.\ f.\quad m.\ st.$ $\Rightarrow\ monoton\ steigend:\ x\in R\ ;\ -\infty\leq x\leq 2-\sqrt{7}\ ;\ 2+\sqrt{7}\leq x\leq\infty$ $monoton\ fallend:\ x\in R\ ;\ 2-\sqrt{7}\leq x\leq 2+\sqrt{7}$
7.	Extrempunkte *Extremstellen:* *notwendige Bedingung:* *f´(x) = 0* *hinreichende Bedingung:* *f´´(x) ≤ 0 ⇒ Max.* *f´´(x) ≥ 0 ⇒ Min.*	$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x^2-4x-3=0$ $x_{E_{1,2}}=2\pm\sqrt{4+3}$ $\Rightarrow x_{E_1}=2+\sqrt{7}\ ;\ x_{E_2}=2-\sqrt{7}$ $f''\left(x_{E_1}\right)=f''\left(2+\sqrt{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(2+\sqrt{7}\right)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}>0\Rightarrow Min.$ $f''\left(x_{E_1}\right)=f''\left(2-\sqrt{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{7}}{3}<0\Rightarrow Max.$

	Extrempunkte: *E* (x_E ; $f(x_E)$)	$f\left(2-\sqrt{7}\right)=\frac{1}{18}\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)^3-\frac{1}{3}\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)+3$ $=\frac{1}{18}\cdot\left(50-19\sqrt{7}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)-1+\frac{\sqrt{7}}{2}+3$ $=\frac{50}{18}-\frac{19\sqrt{7}}{18}-\frac{11}{3}+\frac{4\sqrt{7}}{3}+\frac{\sqrt{7}}{2}+2=\frac{50-66+36}{18}+\frac{-19\sqrt{7}+24\sqrt{7}+9\sqrt{7}}{18}$ $=\frac{20}{18}+\frac{14\sqrt{7}}{18}=\frac{10}{9}+\frac{7}{9}\sqrt{7}$ $\Rightarrow \underline{H\left(2-\sqrt{7}\ ;\frac{10}{9}+\frac{7}{9}\sqrt{7}\right)}$ *für Graph Näherungswert*: $H(-0{,}65\ ;\ 3{,}17)$ $f\left(2+\sqrt{7}\right)=\frac{1}{18}\cdot\left(2+\sqrt{7}\right)^3-\frac{1}{3}\cdot\left(2+\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sqrt{7}\right)+3$ $=\frac{1}{18}\cdot\left(50+19\sqrt{7}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)-1-\frac{\sqrt{7}}{2}+3$ $=\frac{50}{18}+\frac{19\sqrt{7}}{18}-\frac{11}{3}-\frac{4\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+2=\frac{50-66+36}{18}+\frac{19\sqrt{7}-24\sqrt{7}-9\sqrt{7}}{18}$ $=\frac{20}{18}-\frac{14\sqrt{7}}{18}=\frac{10}{9}-\frac{7}{9}\sqrt{7}$ $\Rightarrow \underline{T\left(2+\sqrt{7}\ ;\frac{10}{9}-\frac{7}{9}\sqrt{7}\right)}$ *für Graph Näherungswert*: $T(4{,}64\ ;-0{,}95)$
8.	<u>Wendepunkte</u> *notwendige Bedingung:* *f``(x_w) = 0* *hinreichende Bedingung:* *f```(x_w) ≠ 0* <u>Sattelpunkte:</u> *f``(x_s) = 0 und f`(x_s) =0*	$f''(x)=0\Rightarrow\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow x_w=2$ $f'''(x_w)=f'''(2)=\frac{1}{3}\neq 0$ $f(2)=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}-1+3=\frac{4-12+18}{9}=\frac{10}{9}$ $\Rightarrow \underline{W\left(2\ ;\frac{10}{9}\right)}$ *Näherungswert für Graphen* $W(2;1{,}11)$ $f'(x_w)=f'(2)=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}\neq 0\Rightarrow$ *kein Sattelpunkt*
9.	Wertebereich	WB: $y\in R$
10	Graph