Schriftliche Abiturprüfung 2007
Physik 13 k
(Grundkursniveau)

Thema V1: Wurfbewegungen beim Bogenschießen

Das Bogenschießen diente schon in der Antike sportlichen Zwecken. Seit 1972 ist es wieder eine olympische Sportart.
Bei den nachfolgenden Aufgaben soll der Pfeil als Punktmasse betrachtet werden. Der Luftwiderstand werde vernachlässigt. Das Gelände soll eben und genau waagerecht sein.

1 Flugbahn des Pfeils

Bei Experimenten zur Untersuchung der Wurfbahn beim schrägen Wurf nach oben wird der Pfeil mit der Geschwindigkeit $v_0 = 200\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ zur Horizontalen aus einer Höhe von h = 1,70 m über dem Erdboden abgeschossen und trifft auf dem Boden auf.

1.1 Leiten Sie die Gleichung $y = h + x - \frac{g}{{v_0}^2}\cdot x^2$ für die Wurfparabel für diese Bedingungen her.
Berechnen Sie die maximale Höhe gegenüber dem Erdboden, die der Pfeil erreicht.

1.2 Stellen Sie die Bahn des Pfeils maßstabgerecht in ein y(x) – Diagramm dar.
Hinweis: Die Schussweite beträgt ca. 316 m.

2 Spannen des Bogens

Die Auszugslänge x ist der Abstand der Sehne von der Mitte des Bogens (Bild 1). Beim Spannen eines Bogens wird die Auszugslänge x in Abhängigkeit von der na der Sehne ziehenden Kraft F gemessen. Die Messwerte sind in Bild 2 dargestellt. Der Zusammenhang zwischen F und x lässt sich näherungsweise durch die Gleichung

$F(x) = -0{,}3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}\cdot x^2 + 26\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\cdot x - 260\,\mathrm{N}$ beschreiben.

2.1 Ermitteln Sie die aufzuwendende mechanische Arbeit, wenn man den Bogen von x_0 = 12 cm bis zur Auszugslänge x_A = 60 cm spannt.

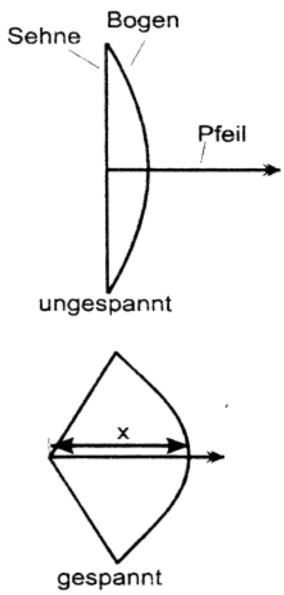


Bild 1

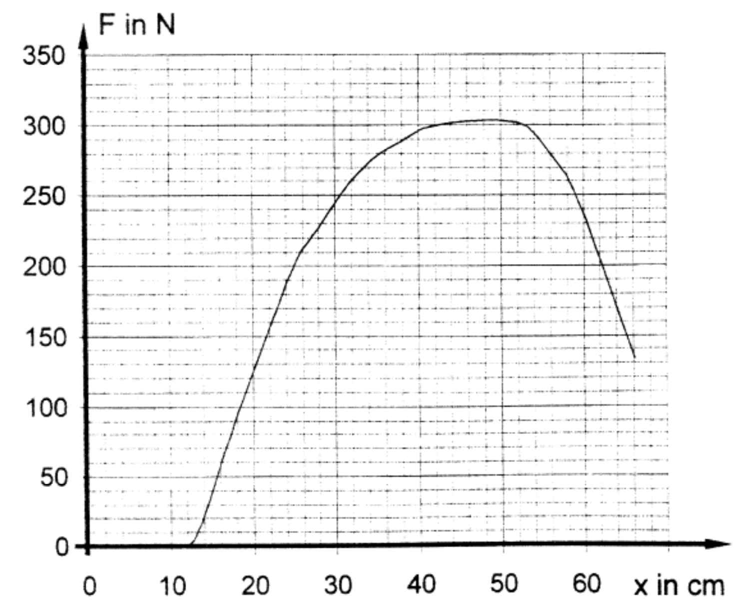


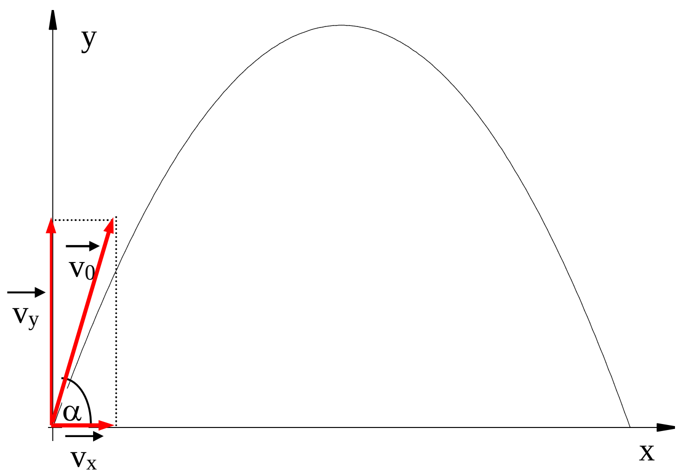
Bild 2

2.2 Ermitteln Sie mithilfe des Diagramms die „Federkonstante“ des Bogens für den linearen Bereich, in dem annähernd das Hooke’sche Gesetz gilt.

Lösung:

1.1

Herleitung:



$v_y = v_0 \cdot \sin(\varphi)$ $\qquad$ $v_x = v_0 \cdot \cos(\varphi)$

$s_y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_y \cdot t + \underbrace{s_0}_{=0}$ $\qquad$ $s_x = v_x \cdot t$

(senkrechter Wurf nach oben) (geradlinig gleichförmig)

$s_y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin(\varphi)$ $\qquad$ mit $s_x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\varphi)$

$\Rightarrow t = \frac{s_x}{v_0 \cdot \cos(\varphi)}$

$$s_y = -\frac{g}{2} \cdot \frac{{s_x}^2}{{v_0}^2 \cdot \cos^2(\varphi)} + \frac{v_0 \cdot s_x \cdot \sin(\varphi)}{v_0 \cdot \cos(\varphi)}$$

$s_y = s_x \cdot \tan(\varphi) - \frac{g \cdot {s_x}^2}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$ $\qquad$ mit $s_y = y - h$

$y - h = s_x \cdot \tan(\varphi) - \frac{g \cdot {s_x}^2}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$ $\qquad$ mit $\alpha = 45° \Rightarrow \tan(45°) = 1$

$y - h = s_x - \frac{g \cdot {s_x}^2}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$ $\qquad$ mit $\alpha = 45° \Rightarrow \cos(45°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2(45°) = \frac{1}{2}$

$$\underline{y = h + s_x - \frac{g}{{v_0}^2} \cdot {s_x}^2}$$

maximale Steighöhe:

$$s_h = h + \frac{v_0^{\,2} \cdot \sin^2(\alpha)}{2 \cdot g} \qquad \text{(nach Tafelwerk)}$$

$$s_h = 1{,}70\,\text{m} + \frac{\left(\frac{200}{3{,}6}\right)^2 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \sin^2(45°)}{2 \cdot 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \underline{80{,}35\,\text{m}}$$

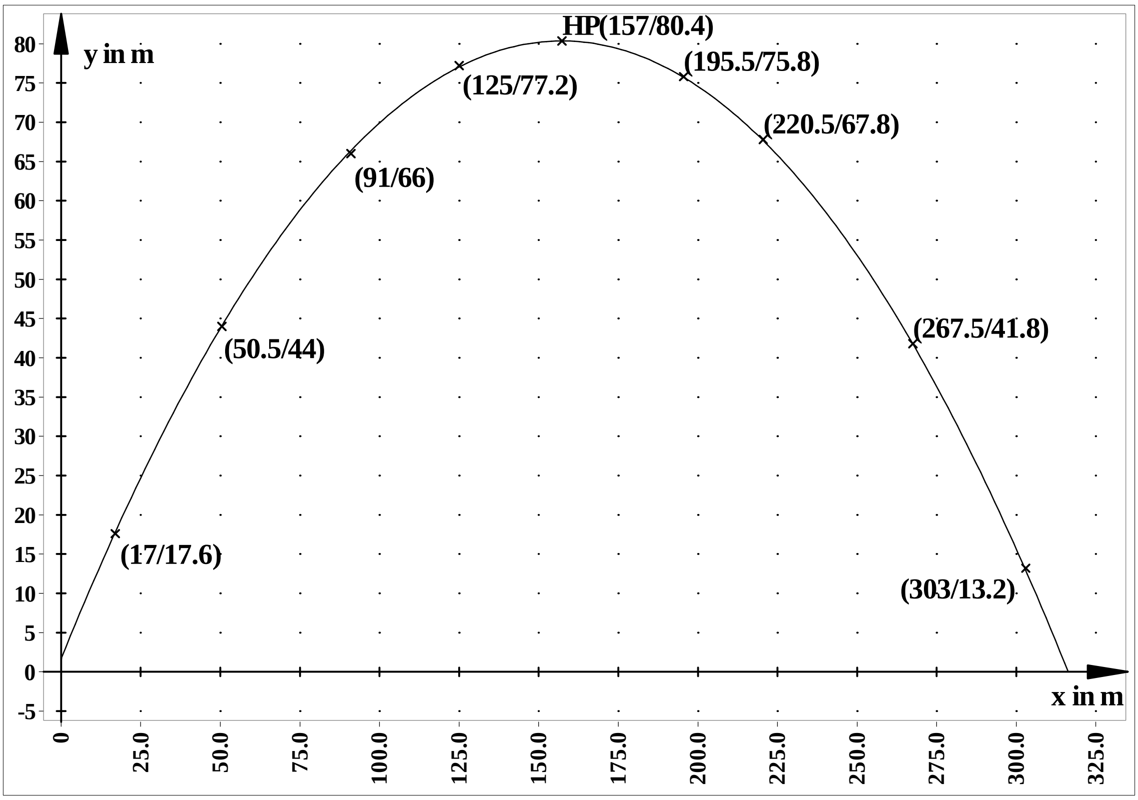
1.2

maßstabgerechte Zeichnung:

$$y = -\frac{g}{v_0^{\,2}} \cdot s_x^{\,2} + s_x + h$$

$$y = -\frac{9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\left(\frac{200}{3{,}6}\right) \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} \cdot s_x^{\,2} + s_x + 1{,}70\,\text{m}$$

Wertetabelle (z. B. siehe Werte in der Darstellung)



2.1

Arbeit:

1. Möglichkeit: Auszählen des Flächeninhalts unterhalb der Kurve im gegebenen Intervall.
2. Möglichkeit: Berechnung

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \; ds$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left(-0,3\frac{N}{cm^2} \cdot x^2 + 26\frac{N}{cm} \cdot x - 260\,N \right) \; dx$$

$$W = \left[-\frac{0,3}{3}\frac{N}{cm^2} \cdot x^3 + \frac{26}{2}\frac{N}{cm} \cdot x^2 - 260\,N \cdot x \right]_{12\,cm}^{60\,cm}$$

$$W = \left[-0,1\frac{N}{cm^2} \cdot x^3 + 13\frac{N}{cm} \cdot x^2 - 260\,N \cdot x \right]_{12\,cm}^{60\,cm}$$

$$W = -0,1\frac{N}{cm^2} \cdot 60^3 cm^3 + 13\frac{N}{cm} \cdot 60^2 cm^2 - 260\,N \cdot 60\,cm$$

$$- \left(-0,1\frac{N}{cm^2} \cdot 12^3 cn^3 + 13\frac{N}{cm} \cdot 12^2 cm^2 - 260\,N \cdot 12\,cm \right)$$

$$W = 110,21\,N \cdot cm = 110,21\,Nm = \underline{110,21\,J}$$

2.2

$$D = \frac{F}{s}$$

Wertepaare aus Diagramm, z.B. $F_1 = 100\,N$; $s_1 = 18\,cm$ und $F_2 = 200\,N$; $s_2 = 25\,cm$

$$D = \frac{F_2 - F_1}{s_2 - s_1} = \frac{100\,N}{7\,cm} = 14,3\,N \cdot cm^{-1} = \underline{1,43k\,N \cdot m^{-1}}$$

<u>oder durch Berechnung:</u>

$F'(20\,cm)$

$$F'(x) = -0,6\frac{N}{cm^2} \cdot x + 26\frac{N}{cm}$$

$$F'(20\,cm) = -0,6\frac{N}{cm^2} \cdot 20\,cm + 26\frac{N}{cm} = 14\,N \cdot cm^{-1} = \underline{1,4\,kN \cdot m^{-1}}$$