Schriftliche Abiturprüfung 2007 – Sachsen-Anhalt
Physik 13 n
(Leistungskursniveau)

G1: Untersuchungen zur relativistischen Massenzunahme

1 Dynamische Masse m

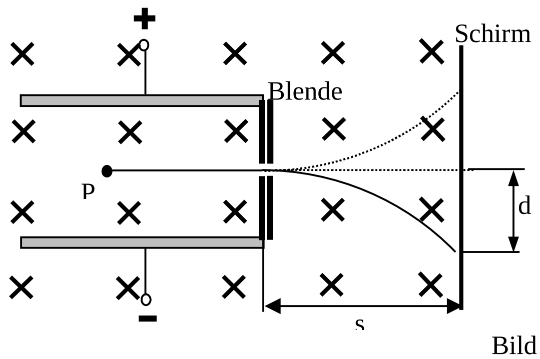
1.1 Die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie (SRT) Einsteins bilden zwei Postulate. Formulieren Sie diese Postulate.

1.2 Ein wichtiges Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie Einsteins ist die relativistische Massenzunahme bewegter Körper.

Stellen Sie in einem Diagramm die Abhängigkeit von $\frac{m}{m_0}$ vom Verhältnis der Geschwindigkeiten $\frac{v}{c}$ im Intervall $0 \le \frac{v}{c} \le 0,9$ dar.

2 Experiment von Bucherer

2.1 Im Jahr 1908 entwickelte Bucherer eine Versuchsanordnung mit dem Ziel, die von Einstein in der SRT abgeleitete relativistische Massenzunahme experimentell zu bestätigen.
Im Bild 1 ist der Aufbau der von Bucherer verwendeten Anordnung schematisch dargestellt. Zwischen die Platten eines Plattenkondensators mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ wird ein radioaktives Präparat P eingebracht, das Elektronen mit einer Geschwindigkeit aussendet, die wesentlich größer als 0,1c ist.
Der gesamte Aufbau, der sich im Vakuum befindet, ist in ein homogenes magnetisches Feld der Flussdichte $\vec{B}$ eingebettet, so dass $\vec{E} \perp \vec{B}$ gilt. Die Versuchsanordnung garantiert, dass nur solche Elektronen aus dem Kondensator austreten, die sich parallel zu dessen Platten bewegen. Die Elektronen, die die Blende passiert haben, werden im homogenen Magnetfeld abgelenkt und auf dem Schirm registriert.
Durch Wechsel der Feldrichtungen des elektrischen und magnetischen Feldes entstehen außerhalb des Kondensators spiegelbildliche Bahnen.



Bild

2.1 Begründen Sie, dass nur Elektronen einer bestimmten Geschwindigkeit den Kondensator parallel zu dessen Platten verlassen können.
Erklären Sie den Verlauf der jeweiligen Bahn außerhalb des Kondensators.

2.2 Für die beschriebene Versuchsanordnung ergibt sich für die Bestimmung der spezifischen Ladung folgende Gleichung: $\frac{e}{m} = \frac{2E \cdot d}{B^2 \cdot (s^2 + d^2)}$.
Berechnen Sie die spezifische Ladung der Elektronen für folgende Messbedingungen:
$E = 7,2 \cdot 10^5\ V \cdot m^{-1}$; $B = 3,0$ mT; $s = 8,25$ cm; $d = 4,5$ mm.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit der Elektronen und zeigen Sie, dass diese Messung die Massenzunahme nach der speziellen Relativitätstheorie bestätigt.

2.3 Die Untersuchung der Abhängigkeit der spezifischen Ladung von der Geschwindigkeit der Elektronen liefert folgende Ergebnisse:

$\frac{v}{c}$	0,23	0,46	0,60	0,73	0,81	0,88
$\frac{e}{m}$ in $10^{11}\ \frac{A\,s}{kg}$	1,7	1,6	1,4	1,2	1,1	0,8

Bestimmen Sie aus den Messergebnissen das jeweilige Verhältnis $\frac{m}{m_0}$ in Abhängigkeit von $\frac{v}{c}$ und tragen Sie die Werte in das in Aufgabe 1.2 angefertigte Diagramm ein.
Vergleichen Sie die Werte mit der theoretischen Kurve und bewerten Sie das Ergebnis hinsichtlich des Zieles des Experimentes.

3. Ein Präzisionsexperiment

1963 führte eine Schweizer Forschergruppe ein Präzisionsexperiment zur Messung der relativistischen Massenzunahme durch. Der prinzipielle Aufbau dieses Experiments ist in Bild 2 dargestellt.
Nach dem Durchlaufen der Beschleunigungsspannung durchfliegen die Elektronen im Bereich I ein homogenes magnetisches Feld, das die Elektronen auf einen Halbkreis mit dem Radius r_B ablenkt.
Im Bereich II des zylindersymmetrischen elektrischen Feldes wirkt die auf der Kreisbahn konstante Coulombkraft als Radialkraft und die Elektronen werden auf einen Viertelkreis mit dem Radius r_E abgelenkt.
In den anderen, nicht gekennzeichneten Bereichen der evakuierten Röhre erfolgt keine Ablenkung, da die Gravitationswirkung als vernachlässigbar anzusehen ist.

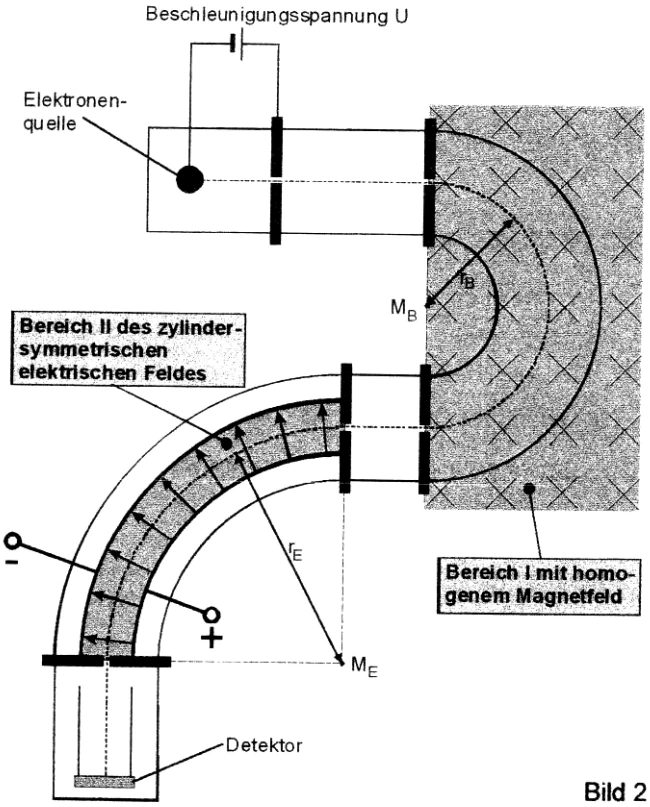


Bild 2

3.1 Zeigen Sie, dass für die spezifische Ladung der Elektronen, die den Detektor erreichen, folgende Gleichung gelten muss: $\frac{e}{m} = \frac{E \cdot r_E}{B^2 \cdot r_B^{\ 2}}$.

3.2 Bei einer Beschleunigungsspannung U durchfliegen die Elektronen den angegebenen Bahnverlauf, wenn im Bereich I ein Magnetfeld mit der Flussdichte B und im Bereich II ein elektrisches Feld mit der Feldstärke E anliegen.
Daten:

$r_B = 0{,}50000\ \text{m}$ $\qquad$ $r_E = 1{,}00000\ \text{m}$

$U = 2{,}53000 \cdot 10^{6}\ \text{V}$ $\qquad$ $B = 2{,}00000 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$

$E = 2{,}95529 \cdot 10^{6}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

Berechnen Sie für diese Bedingungen die relativistische Masse der Elektronen und die von ihnen erreichte Geschwindigkeit.
Berechnen Sie die Ruhenergie und die relativistische kinetische Energie der Elektronen und begründen Sie unter Einbeziehung einer Rechnung, dass diese Messung die Einstein'sche Gleichung $E = m \cdot c^2$ mit sehr guter Genauigkeit bestätigt.
Hinweis: Nutzen Sie bei der Berechnung die volle Genauigkeit der Naturkonstanten Ihres Tafelwerkes und runden Sie in diesem Fall die Taschenrechnerwerte nicht.

1. Dynamische Masse m

1.1

1. Postulat:
Alle Inertialsysteme sind bezüglich physikalischer Gesetze gleichberechtigt. Die fundamentalen Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in gleicher Weise.
2. Postulat:
Die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum hat in allen Bezugssystemen (Inertialsystemen) den gleichen Wert und ist unabhängig von der Bewegung des emittierenden Körpers.

1.2

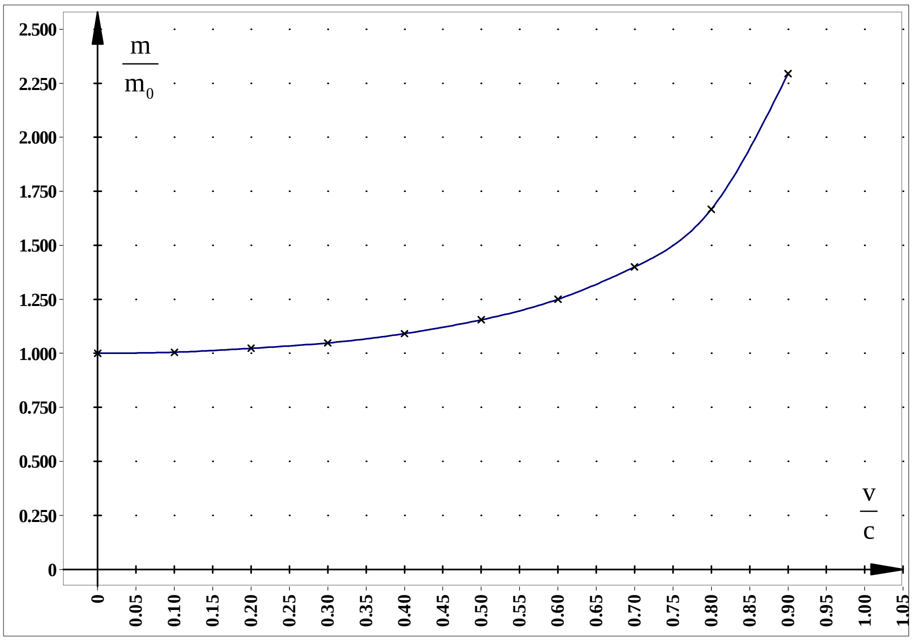
$\frac{m}{m_0}\left(\frac{v}{c}\right)$ - Diagramm:

$\frac{v}{c}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{m}{m_0}$	1	1,005	1,023	1,048	1,091	1,155	1,25	1,40	1,667	2,294

Beispielrechnung:

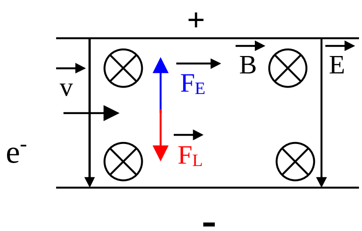
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m}{m_0}_{0,2c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0,2^2c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,2^2}} = 1,021$$



2. Experiment von Bucherer

2.1 Begründung für Geschwindigkeit:



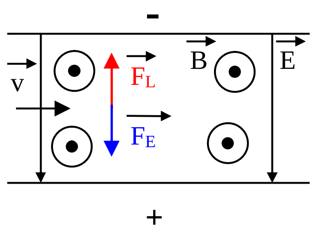
- Elektronen werden durch das elektrische Feld (elektrische Feldkraft) nach oben abgelenkt
  - $F_{el} = E \cdot e$
- Elektronen werden durch das magnetische Feld (Lorenzkraft) nach unten abgelenkt (Drei – Finger – Regel der linken

Hand)
  - $F_L = e \cdot v \cdot B$
  - Lorenzkraft ist abhängig von der Geschwindigkeit
- Wenn $F_{el} = F_L$ kann die Bedingung nur für eine Geschwindigkeit gelten
- nur für den Fall bewegen sich die Elektronen geradlinig durch den Kondensator; werden nicht abgelenkt $\Rightarrow$ geradlinige Flugbahn bei $F_{el} = F_L$

außerhalb des Plattenkondensators:

- nur Lorenzkraft wirkt entsprechend der Drei – Finger – Regel der linken Hand als Zentripetalkraft $F_L = F_Z \Rightarrow$ Kreisbahn
- Elektronen werden nach unten abgelenkt

Erklärung der Bahn bei Wechsel der Feldrichtungen:



- Werden E-Feld und B-Feld genau entgegengesetzt orientiert, so bewegen sich die Elektronen der gleichen Geschwindigkeit geradlinig.
- nur die Richtungen von F_{el} und F_L werden vertauscht, die Beträge ändern sich nicht
- außerhalb des Plattenkondensators:
  - nur Lorenzkraft wirkt entsprechend der Drei – Finger – Regel der linken Hand
  - Elektronen werden nach oben abgelenkt

2.2 Berechnung:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot E \cdot d}{B^2 \cdot \left(s^2 + d^2\right)}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot 7{,}2 \cdot 10^5\,V \cdot m^{-1} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,m}{\left(3 \cdot 10^{-3}\right)^2 T^2 \cdot \left(\left(8{,}25 \cdot 10^{-2}\,m\right)^2 + \left(4{,}5 \cdot 10^{-3}\,m\right)^2\right)} = \underline{1{,}055 \cdot 10^{11}\,C \cdot kg^{-1}}$$

$$\left[\frac{e}{m}\right] = \frac{V \cdot m^{-1} \cdot m}{T^2 \cdot m^2} = \frac{V}{V^2 \cdot s^2 \cdot m^{-4} \cdot m^2} = \frac{m^2}{V \cdot s^2} \cdot \frac{A\,s}{A\,s} = \frac{C \cdot m^2}{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot s^2} = \underline{C \cdot kg^{-1}}$$

Geschwindigkeit:

$$F_L = F_{el}$$

$$e \cdot v \cdot B = E \cdot e$$

$$v = \frac{E}{B}$$

$$v = \frac{7{,}2 \cdot 10^5\,V \cdot m^{-1}}{3{,}0\,V \cdot s \cdot m^{-2}} = \underline{2{,}4 \cdot 10^8\,m \cdot s^{-1}} = 0{,}8\,c$$

Nachweis, dass die Messung die Massenzunahme nach der speziellen Relativitätstheorie bestätigt:

1. Möglichkeit:

Massenbestimmung aus Experiment:

$$\frac{e}{m} = 1{,}055\,C \cdot kg^{-1}$$

$$m = \frac{e}{1{,}055 \cdot 10^{11}\,C \cdot kg^{-1}} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,A\,s}{1{,}055 \cdot 10^{11}\,C \cdot kg^{-1}} = \underline{1{,}518 \cdot 10^{-30}\,kg}$$

Massenbestimmung – relativistisch:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{\sqrt{1 - \frac{\left(2{,}4 \cdot 10^8\right)^2 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}}} = \underline{1{,}518 \cdot 10^{-30}\,\text{kg}}$$

2. Möglichkeit:
Bestimmung der spezifischen Ladung – relativistisch:

$$\frac{e}{m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s}}{1{,}518 \cdot 10^{-30}\,\text{kg}} = 1{,}055 \cdot 10^{11}\,\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Da die Ladung des Elektrons sich nicht verändert, muss die Massenzunahme die Verringerung der spezifischen Ladung bewirken, wie es das Experiment nachgewiesen hat.
$\Rightarrow$ Damit braucht man die Masse aus dem experimentellen Daten zum Vergleich nicht berechnen!

3. Möglichkeit:
Berechnen der Radien der Kreise im B-Feld (nach Durchgang durch Kondensator) und des Auftreffortes
r_1 – Radius ohne Berücksichtigung der Massenzunahme
r_2 - Radius mit Berücksichtigung der Massenzunahme

$$F_Z = F_L$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$$

$$r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}$$

klassisch:

$$r_1 = \frac{m_0 \cdot v}{e \cdot B}$$

$$r_1 = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 2{,}4 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A s} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\text{V s} \cdot \text{m}^{-2}} = 0{,}455\,\text{m}$$

$$[r] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{A s} \cdot \text{V s} \cdot \text{m}^{-2}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}} = \text{m}$$

relativistisch:

$$r_1 = \frac{m_R \cdot v}{e \cdot B}$$

$$m_R = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(0,8)^2}}\,\frac{m_0}{\sqrt{0,36}} = \frac{m_0}{0,6}$$

$$r_1 = \frac{m_0 \cdot v}{0,6 \cdot e \cdot B}$$

$$r_1 = \frac{9,109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 2,4 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{0,6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V\,s \cdot m^{-2}}} = 0,758\,\mathrm{m}$$

Berechnung des zu den Radien gehörenden Abstandes:

Pythagoras:

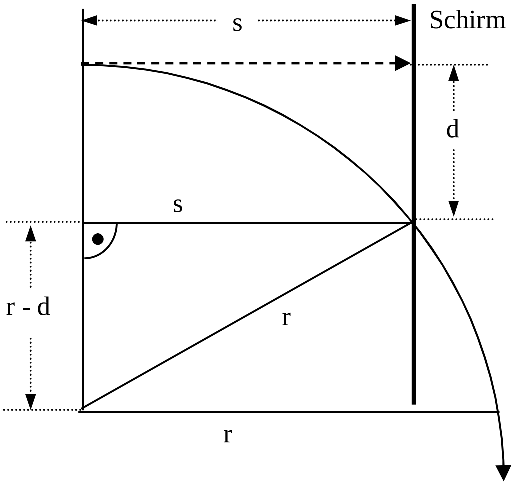
$$r^2 = s^2 + (r-d)^2$$

$$r^2 = s^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot d + d^2$$

$$0 = d^2 - 2 \cdot r \cdot d + s^2$$

$$d_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - s^2} \qquad \text{da} \quad d \le r$$

$$d = r - \sqrt{r^2 - s^2}$$



klassisch:

$$d_1 = r_1 - \sqrt{r_1^{\,2} - s^2}$$

$$d_1 = 0,455\,\mathrm{m} - \sqrt{0,455^2\,\mathrm{m}^2 - \left(8,25 \cdot 10^{-2}\right)^2\,\mathrm{m}^2} = 0,00754\,\mathrm{m} = 7,54\,\mathrm{mm}$$

Entfernung größer als Anlagenparameter.
relativistisch:

$$d_2 = r_2 - \sqrt{r_2^{\,2} - s^2}$$

$$d_2 = 0,758\,\mathrm{m} - \sqrt{0,758^2\,\mathrm{m}^2 - \left(8,25 \cdot 10^{-2}\right)^2\,\mathrm{m}^2} = 0,0045\,\mathrm{m} = 4,5\,\mathrm{mm}$$

⇒ Abstand d_2 entspricht den experimentellen Ergebnissen; also ist damit die relativistische Massenzunahme bestätigt.

<u>Vergleich:</u>

- Massenbestimmung im Experiment entspricht der relativistischen Masse

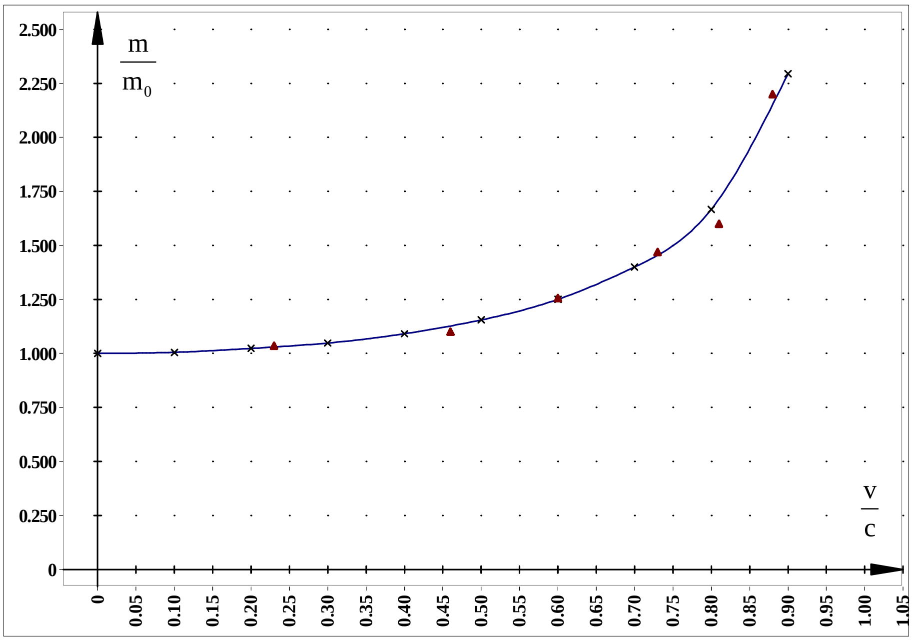
2.3

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\frac{m}{e}}{\frac{m_0}{e}} = \frac{\frac{e}{m_0}}{\frac{e}{m}}$$

$$\frac{m}{m_{0\;0,23\frac{v}{c}}} = \frac{1,758 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C \cdot kg^{-1}}}{1,7 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C \cdot kg^{-1}}} = 1,035$$

$\frac{v}{c}$	0,23	0,46	0,60	0,73	0,81	0,88
$\frac{m}{m_0}$	1,035	1,10	1,256	1,47	1,60	2,20

Eintragen der Punkte in das $\frac{m}{m_0}\left(\frac{v}{c}\right)$ - Diagramm: (Punkte müssen nicht verbunden werden)



Vergleich:

- bei kleineren Geschwindigkeiten sind die Werte beider Kurven fast identisch
- erst bei höheren Geschwindigkeiten treten Abweichungen auf

Bewertung:

- Experimentell Ergebnis bestätigen die Theorie
- Experiment hat sein Ziel erfüllt.

3. Ein Präzisionsexperiment

3.1

Herleitung:

$$F_z = F_L$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r_B} = e \cdot v \cdot B$$

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{r_B{}^2 \cdot B^2}$$

$$\frac{e^2}{m^2} = \frac{e \cdot E \cdot r_E}{r_B{}^2 \cdot B^2 \cdot m}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{E \cdot r_E}{r_B{}^2 \cdot B^2}$$

$$F_{el} = F_Z$$

$$e \cdot E = m \cdot \frac{v^2}{r_E}$$

$$v^2 = \frac{e \cdot E \cdot r_E}{m}$$

3.2

Massenberechnung:

$$\frac{e}{m} = \frac{E \cdot r_E}{{r_B}^2 \cdot B^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{e \cdot {r_B}^2 \cdot B^2}{E \cdot r_E}$$

$$m = \frac{1,60217646 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot (0,5\,\mathrm{m})^2 \cdot \left(2,0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}\right)^2}{2,95529 \cdot 10^6\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot 1,0\,\mathrm{m}} = 5,42139 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$$

$$[m] = \frac{\mathrm{A\,s} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{T}^2}{\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A\,s} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{V}^2 \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-4}}{\mathrm{V}} = \mathrm{A\,s} \cdot \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} = \mathrm{kg}$$

Geschwindigkeit:

1. Möglichkeit: mit 3.1

$$v = \sqrt{\frac{e \cdot E \cdot r_E}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{1,60217646 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 2,95529 \cdot 10^6\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot 1,0\,\mathrm{m}}{5,42139 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}} = \underline{2,95529 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0,9851c}$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\mathrm{A\,s} \cdot \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{kg}}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

2. Möglichkeit:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$$

$$v = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{9,10938288 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{5,42139 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}\right)^2} = \underline{2,95528 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0,9851c}$$

Ruheenergie:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

$$E_0 = 9,10938288 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)^2 = \underline{8,1984 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}}$$

relativistische kinetische Energie:

$$E_{kin} = e \cdot U$$

$$E_{kin} = 1,60217646 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s} \cdot 2,53 \cdot 10^6\,\mathrm{V} = \underline{4,0535 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}$$

Energie nach Einstein:

$$E = m \cdot c^2$$

$$E = 5{,}42139 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)^2 = \underline{4{,}8793 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}$$

Bestätigung:

$$E = E_{kin} + E_0$$

$$4{,}8793 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} = 4{,}0535 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} + 8{,}1984 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$$

$$4{,}8793 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} = 4{,}8733 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$$