Schriftliche Abiturprüfung 2007
Physik 13 k
(Leistungskursniveau)

Thema G1: Elektrische Felder

1 Grundlagen

Beschreiben Sie die Grundlagen zeitlich veränderlicher elektrischer Felder. Gehen Sie bei Ihrer Darstellung insbesondere auf die Erzeugung, die Feldformen, den Nachweis, die Beschreibung und die Verrichtung von Arbeit im Feld ein.

2 Bewegung im homogenen Feld

Die Platten eines Plattenkondensators (Bild 1) sind vertikal angeordnet und haben einen Abstand von d = 6,0 cm. Am Kondensator liegt eine Spannung von $U_K = 1200$ V an. Der Punkt P_1 sei s = 1,0 cm von der positiven Platte entfernt. Ein Probekörper der Masse $m = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{kg}$ und der Ladung q = + 8,0 nC soll im Punkt P_1 aus der Ruhe losgelassen werden. Wegen der geringen Ausdehnung soll der Probekörper als punktförmig betrachtet werden. Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum.

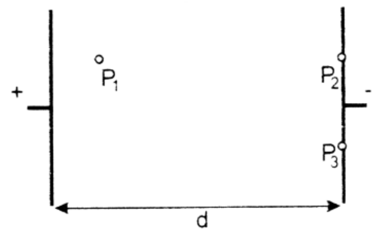


Bild 1

2.1 Zeigen Sie, dass der Probekörper im Punkt P_2 mit der Geschwindigkeit $v = 1{,}26\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ auf die negative Platte auftrifft, wenn seine Gewichtskraft zunächst vernachlässigt wird.

2.2 Wegen der Gewichtskraft auf den Probekörper trifft dieser in der Realität im Punkt P_3 auf die negative Platte. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$.
Entscheiden und begründen Sie, ob die Vernachlässigung der Gewichtskraft in Aufgabe 2.1 angemessen ist.

2.3 In einem veränderten Experiment werden nun im Punkt P_1 Elektronen mit vernachlässigbar kleiner Anfangsgeschwindigkeit freigesetzt und im Feld beschleunigt. Die am Kondensator anliegende Spannung U_K ist dabei nahezu stufenlos bis $10^6\,\text{V}$ regelbar. Begründen Sie, weshalb man bei der Berechnung der Auftreffgeschwindigkeit im Punkt P_2 relativistisch rechnen muss.

Leiten Sie die Gleichung $v(U_B) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 \cdot c^2}{U_B \cdot e + m_0 \cdot c^2}\right)^2}$ zur Berechnung dieser Geschwindigkeit her.
Stellen Sie die Auftreffgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung in einem $v(U_B)$-Diagramm für $0 \le U_K \le 10^6\,\text{V}$ grafisch dar.
Berechnen Sie dazu zuerst die fehlenden Werte in der Tabelle.

U_K in $10^5\,\text{V}$	0,1	0,5	1,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,0
v in $10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	0,53		1,53	1,97	2,39		2,70	2,77

Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen.

3. Radialfeld

Eine Kugel mit positiver Ladung Q erzeugt ein radiales elektrisches Feld, in welchem sich eine ebenfalls positive Probeladung q im Abstand r von Q befindet (Bild 2).
Dabei seien die Ladungen $Q = +4,0\,\mu C$ und $q = +2,0\,nC$ gegeben.

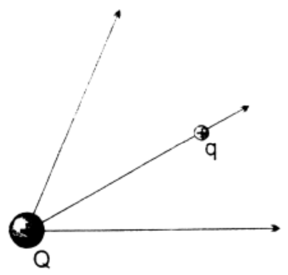


Bild 2

3.1 Stellen Sie die elektrische Feldkraft F_C in Abhängigkeit vom Abstand r im $F(r)$ – Diagramm für das Intervall $1,0\,cm \le r \le 10\,cm$ grafisch dar.

3.2 Leiten Sie eine Gleichung zur Berechnung der Verschiebungsarbeit vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 her. Dabei können Sie von der allgemeinen Gleichung $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$ für die mechanische Arbeit ausgehen.
Bestimmen Sie den Betrag der im Intervall $1,0\,cm \le r \le 10\,cm$ verrichteten mechanischen Arbeit.

Lösungen:

1.

kommt noch!

2.1

<u>Berechnen von v:</u>

$$E_{kin} = E_{el}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_2 = q \cdot U_B$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_B}{m}} \qquad \text{mit } \frac{U_B}{s_2} = \frac{U}{d} \Rightarrow U_B = \frac{U \cdot s_2}{d}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U \cdot s_2}{m \cdot d}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{V} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm}}{10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}0\,\mathrm{cm}}} = 1{,}2649\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \underline{1{,}26\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{A\,s \cdot V} \cdot \cancel{\mathrm{cm}}}{\mathrm{kg} \cdot \cancel{\mathrm{cm}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{\cancel{\mathrm{kg}}}} = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

oder:

$$s_2 = \frac{a}{2} \cdot t^2 + \underbrace{v_0 \cdot t + s_0}_{=0} \qquad v_2 = a \cdot t + \underbrace{s_0}_{=o} \Rightarrow t = \frac{v_2}{a}$$

$$s_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{{v_2}^2}{a^2} = \frac{{v_2}^2}{2 \cdot a}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot a \cdot s_2} \qquad \text{mit} \qquad F_B = F_{el}$$

$$m \cdot a = E \cdot q \qquad \text{mit} \quad E = \frac{U}{d}$$

$$a = \frac{U \cdot q}{m \cdot d}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot q \cdot s_2}{m \cdot d}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A\,s} \cdot 1{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{V} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm}}{10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}0\,\mathrm{cm}}} = 1{,}2649\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \underline{1{,}26\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{A\,s \cdot V} \cdot \cancel{\mathrm{cm}}}{\mathrm{kg} \cdot \cancel{\mathrm{cm}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{\cancel{\mathrm{kg}}}} = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

<u>Beschleunigungsarbeit:</u>

$$W_B = m \cdot a \cdot s_2 \qquad \text{mit } a = \frac{U \cdot q}{m \cdot d}$$

$$W_B = m \cdot \frac{U \cdot q}{m \cdot d} \cdot s_2 = \frac{U \cdot q \cdot s_2}{d}$$

$$W_B = \frac{1{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{V} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A\,s} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm}}{6{,}0\,\mathrm{cm}} = \underline{8{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}}$$

2.2

Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$:

freier Fall in y-Richtung: $\Delta h = \overline{P_2P_3}$

$$\Delta h = \frac{g}{2} \cdot {t_B}^2 \qquad \text{mit} \quad t_B = \frac{v_2}{a} \qquad \text{und} \quad a = \frac{U \cdot q}{m \cdot d}$$

$$t_B = \frac{v_2 \cdot m \cdot d}{U \cdot q}$$

$$\Delta h = \frac{g}{2} \cdot \frac{{v_2}^2 \cdot m^2 \cdot d^2}{U^2 \cdot q^2} \qquad \text{mit} \quad {v_2}^2 = \frac{2 \cdot U \cdot q \cdot s_2}{m \cdot d}$$

$$\Delta h = \frac{g}{2} \cdot \frac{2 \cdot U \cdot q \cdot s_2 \cdot m^2 \cdot d^2}{U^2 \cdot q^2 \cdot m \cdot d} = \frac{g \cdot s_2 \cdot m \cdot d}{U \cdot q}$$

$$\Delta h = \frac{9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}05\,\text{m} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} \cdot 0{,}06\,\text{m}}{1{,}2 \cdot 10^3\,\text{V} \cdot 8 \cdot 10^{-9}\,\text{As}} = 0{,}030656\,\text{m} = \underline{3{,}07\,\text{cm}}$$

$$\Delta h = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}}{\text{V} \cdot \text{As}} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m}$$

Wenn einzeln berechnet:

$$t_B = \frac{v_2}{a} \qquad \text{mit} \quad a = \frac{U \cdot q}{m \cdot d}$$

$$t_B = \frac{v_2 \cdot m \cdot d}{U \cdot q}$$

$$t_B = \frac{1{,}2649\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} \cdot 0{,}06\,\text{m}}{1{,}2 \cdot 10^3\,\text{V} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{A}\,\text{s}} = 7{,}9056 \cdot 10^{-2}\,\text{s}$$

$$\Delta h = \frac{g}{2} \cdot {t_B}^2$$

$$\Delta h = \frac{9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{2} \cdot \left(7{,}9056 \cdot 10^{-2}\,\text{s}\right)^2 = 3{,}0656\,\text{cm} = \underline{3{,}07\,\text{cm}}$$

<u>Entscheidung:</u>

Gewichtskraft darf nicht vernachlässigt werden, da die Ladung bei 5 cm horizontaler Bewegung um 3 cm fällt.

2.3

<u>Bei klassischer Berechnung mi U = 10^6 V:</u>

Entsprechend Teilaufgabe 2.1 gilt:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_K \cdot s_2}{m \cdot d}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A}\,\text{s} \cdot 10^6\,\text{V} \cdot 5{,}0\,\text{cm}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 6{,}0\,\text{cm}}} = 5{,}41 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \underline{1{,}8\,\text{c}}$$

Da das Ergebnis bei klassischem Ansatz größer als die Lichtgeschwindigkeit wäre, muss ein relativistischer Ansatz gewählt werden.

<u>Bei relativistischer Berechnung:</u>

$$E_{kin} = E - E_0$$

$$E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

$$e \cdot U = (m - m_0) \cdot c^2$$

$$e \cdot U = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) \cdot c^2 \Rightarrow m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e \cdot U + m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{e \cdot U + m_0 \cdot c^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{\left(e \cdot U + m_0 \cdot c^2\right)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{\left(e \cdot U + m_0 \cdot c^2\right)^2}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{\left(e \cdot U + m_0 \cdot c^2\right)^2}} \cdot c = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 \cdot c^2}{e \cdot U + m_0 \cdot c^2} \right)^2} \cdot c$$

U_B berechnen:

$$\frac{U_B}{U_x} = \frac{s}{d} \Rightarrow U_B = \frac{U_x \cdot s}{d}$$

$$U_{B_{0,5}} = \frac{10^4\,\mathrm{V} \cdot 5{,}0\,\mathrm{cm}}{6{,}0\,\mathrm{cm}} = 8{,}33 \cdot 10^3\,\mathrm{V}$$

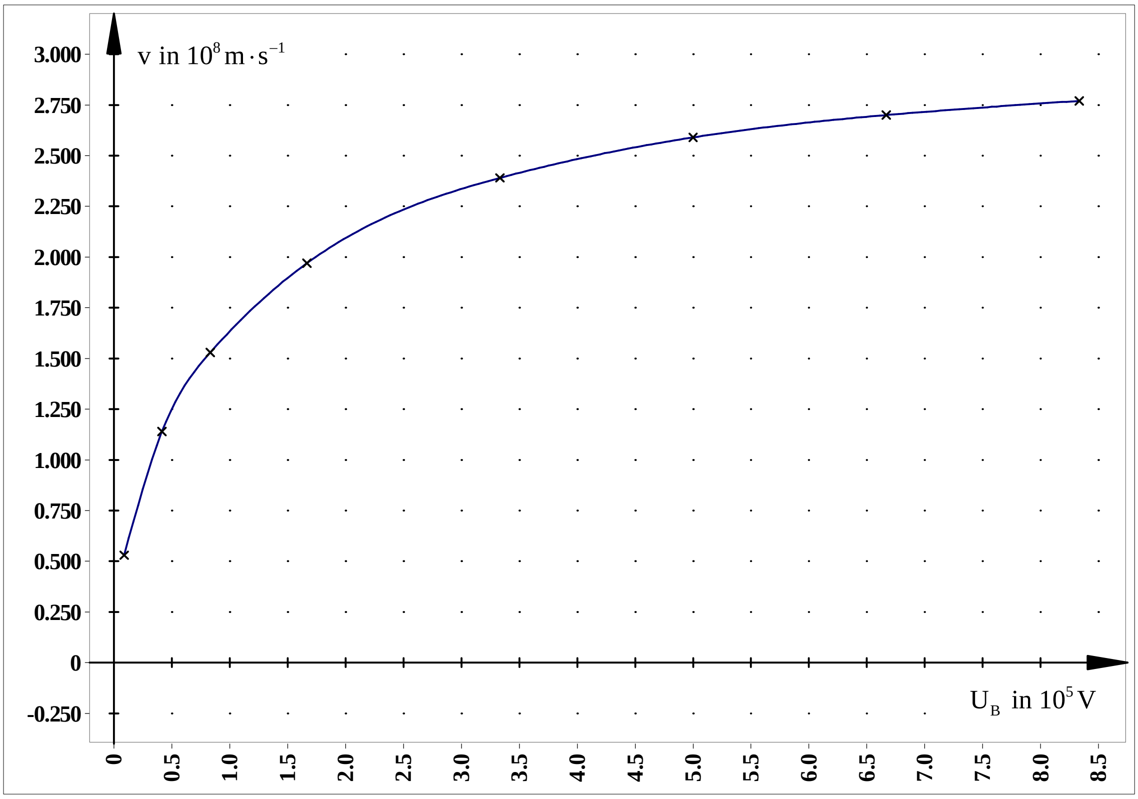
U_K in $10^5\,\mathrm{V}$	0,1	0,5	1,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,0
U_B in $10^5\,\mathrm{V}$	**0,0883**	**0,416**	**0,833**	**1,667**	**3,333**	**5,0**	**6,667**	**8,333**
v in $10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	0,53	**1,14**	1,53	1,97	2,39	**2,59**	2,70	2,77

$$v = \sqrt{1-\left(\frac{9{,}109\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\left(3\cdot 10^{8}\,m\cdot s^{-1}\right)^2}{1{,}602\cdot 10^{-19}\,A\,s\cdot 5{,}0\cdot 10^{5}\,V + 9{,}109\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\left(3\cdot 10^{8}\,m\cdot s^{-1}\right)^2}\right)^2}\cdot 3\cdot 10^{8}\,m\cdot s^{-1}$$

$$v = \underline{2{,}59\cdot 10^{8}\,m\cdot s^{-1}}$$

$$[v] = \sqrt{1-\left(\frac{kg\cdot\left(m\cdot s^{-1}\right)^2}{A\,s\cdot V + kg\left(m\cdot s^{-1}\right)^2}\right)^2}\cdot m\cdot s^{-1} = \sqrt{1-\left(\frac{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}{kg\cdot m^2\cdot s^{-2} + kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}\right)^2}\cdot m\cdot s^{-1}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\cancel{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}}{\cancel{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}}\right)^2}\cdot m\cdot s^{-1} = m\cdot s^{-1}$$



Interpretation:

- Mit zunehmender Beschleunigungsspannung steigt die Geschwindigkeit der Elektronen an.
- Anstieg der Kurve nimmt mit zunehmender Beschleunigungsspannung ab (degressiv steigend)
- Geschwindigkeit nähert sich einem Grenzwert
- Grenzwert:

$$\lim_{U\to\infty}\left(\sqrt{1-\left(\frac{m_0\cdot c^2}{e\cdot U + m_0\cdot c^2}\right)^2}\cdot c\right) \qquad \text{mit } m;\ c;\ e = \text{konst.}$$

$$\lim_{U\to\infty}\left(\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k_2\cdot U + k_1}\right)^2}\cdot c\right) = \sqrt{1-\left(\frac{k_1}{\infty}\right)^2}\cdot c = \sqrt{1-0}\cdot c = c$$

- Die Maximalgeschwindigkeit, die das Elektron theoretisch erreichen kann ist gleich der Lichtgeschwindigkeit.

3.1

$$F_{el} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

$$F_{el} = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 2 \cdot 10^{-9}\,C}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

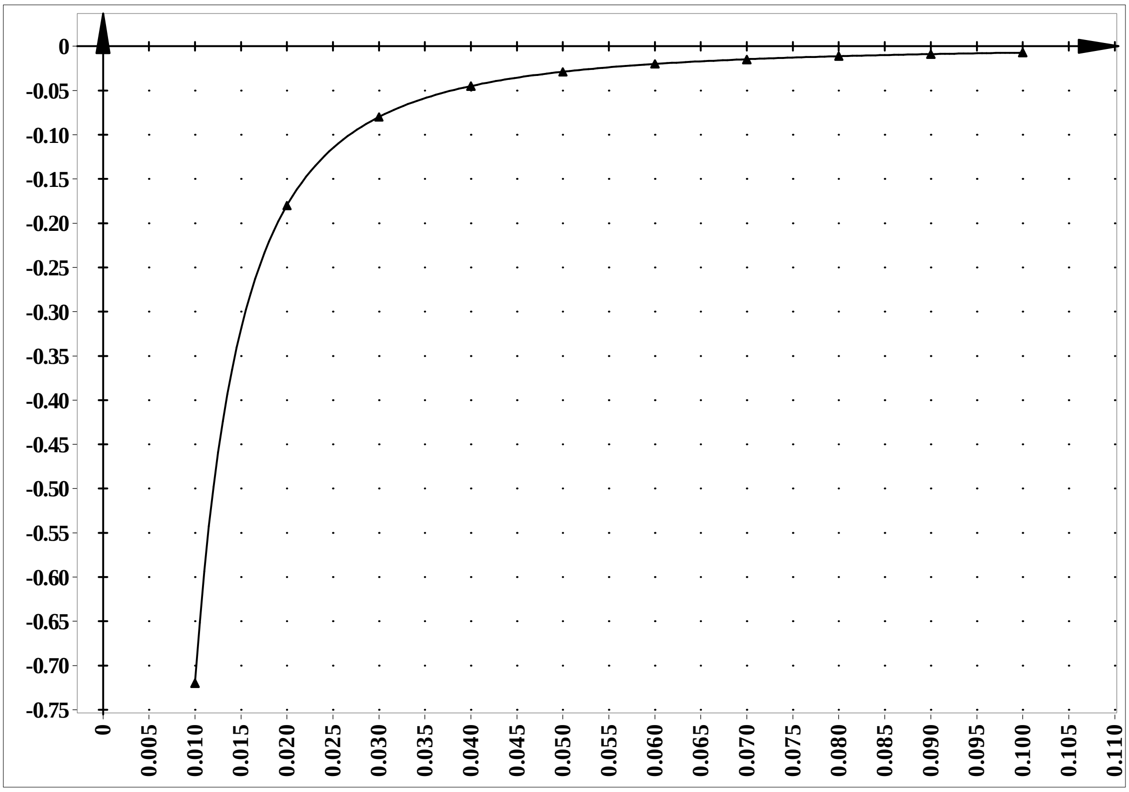
$$F_{el} = 7{,}19 \cdot 10^{-5}\,N \cdot m^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\left[F_{el}\right] = \frac{C \cdot C}{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}} \cdot \frac{1}{r^2} = A \cdot s \cdot V \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} = N \cdot m \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} = N \cdot m^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

Beispiel:

$$F_{0,1} = 7{,}19 \cdot 10^{-5}\,N \cdot m^2 \cdot \frac{1}{0{,}1^2\,m^2} = \underline{-0{,}72\,N}$$

r in m	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
F in N	-0,72	-0,18	-0,080	-0,045	-0,029	-0,020	-0,015	-0,011	-0,009	-0,007



3.2 <u>Herleitung:</u>

$$W=\int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds \text{ mit } s=r \text{ und } F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2}$$

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2}\,dr$$

$$W=\frac{Q\cdot q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$W=\frac{Q\cdot q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}=\frac{Q\cdot q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)$$

$$W=-\frac{Q\cdot q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

<u>Berechnung:</u>

$$W_{el}=-\frac{4,0\cdot 10^{-6}\,C\cdot 2\cdot 10^{-9}\,C}{4\cdot\pi\cdot 8,854\cdot 10^{-12}\,A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}}\cdot\left(\frac{1}{0,1\,m}-\frac{1}{0,01\,m}\right)=6,47\cdot 10^{-3}=\underline{6,47\,mJ}$$

$$\left[W_{el}\right]=\frac{C\cdot C}{A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}}\cdot\frac{1}{m}=A\cdot s\cdot V\cdot m\cdot\frac{1}{m}=N\cdot m\cdot m\cdot\frac{1}{m}=Nm=J$$