SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2000PHYSIK (LEISTUNGSKURS)

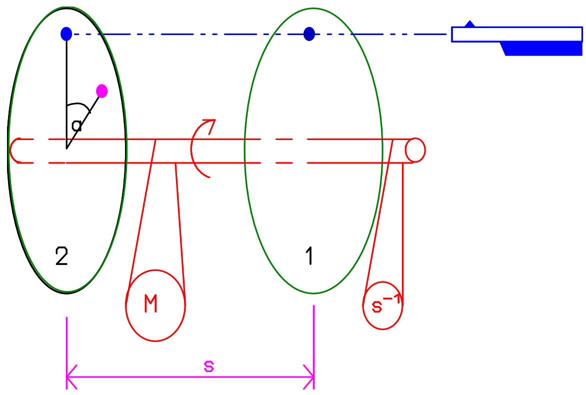
Thema 2: Anwendungen der Gesetze der Mechanik an Beispielen der Translation, Rotation und Kreisbewegung

1 Translation und Rotation - Bestimmung der Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel

Eine Möglichkeit der Bestimmung der Geschwindigkeit einer Luftgewehrkugel ist das Rotationsverfahren. Zwei im Abstand s = 1,00 m hintereinander auf einer Welle befestigte Scheiben aus Pappe rotieren und werden parallel zur Rotationsachse durchschossen. Die Drehzahl der Anordnung wird auf n = 2000 min'1 eingestellt.
Nach Durchschlagen der vorderen Scheibe wird bei dieser Drehzahl die hintere Scheibe um einen Drehwinkel von α = 60° versetzt getroffen.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Luftgewehrkugel unter der Voraussetzung der Geradlinigkeit des Geschossweges. Begründen Sie, dass die Abweichung infolge der parabelförmigen Bahn zwischen den nur 1 m voneinander entfernten Scheiben vernachlässigt werden kann.

Lösung:



Berechnung der Geschossgeschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{da gleichförmige Rotation}: \frac{t}{T} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow t = \frac{\alpha}{360°} \cdot T$$

$$v = \frac{s \cdot 360°}{\alpha \cdot T} \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{n}$$

$$v = \frac{s \cdot n \cdot 360°}{\alpha} = \frac{1{,}00\,m \cdot 2000\,s^{-1} \cdot 360°}{60° \cdot 60} = \underline{200\,m \cdot s^{-1}}$$

Begründung der Vernachlässigung der Abweichung:

z.B. Berechnung der Zeitspanne und Fallweg:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1{,}00\,m}{200\,m \cdot s^{-1}} = 5 \cdot 10^{-3}\,s$$

$$s_y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,m \cdot s^{-2} \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\,s\right)^2 = 1{,}23 \cdot 10^{-4}\,m$$

2 Autofahrt auf einer Brücke – Geschwindigkeitsbegrenzung

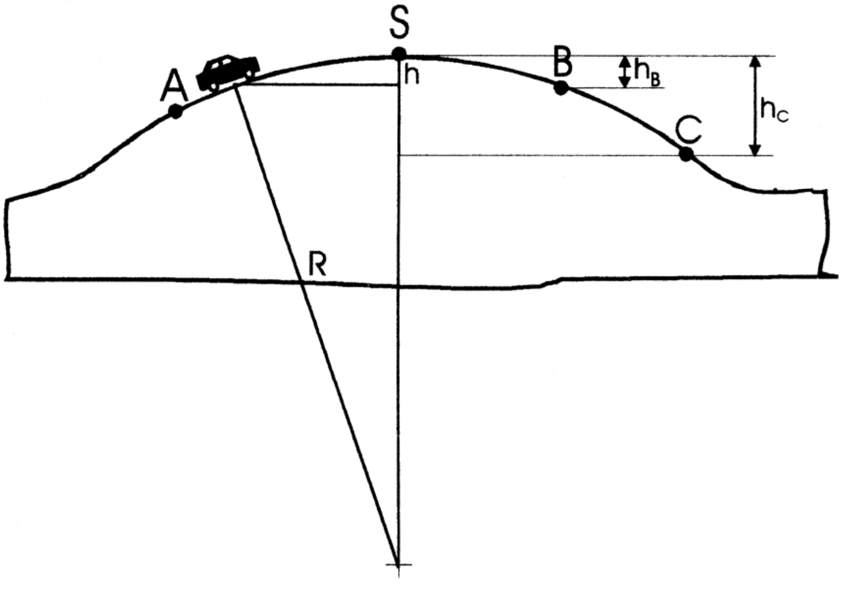
Auf Brücken mit konvex gewölbter Fahrbahn besteht selbst bei idealen Witterungsbedingungen eine Gefahr für die Verkehrssicherheit. Die zulässige Höchstgeschwindigkeit muss deshalb ermittelt und beachtet werden. Bild 1 zeigt eine solche Brücke mit einer als Kreisbogen aufgefassten Fahrbahn. Der Krümmungsradius beträgt R = 100 m. Es wird die Kreisbewegung eines Fahrzeuges von A über S nach C betrachtet.

2.1 Beim Durchfahren dieses Weges besteht die Gefahr, dass das Fahrzeug von der Fahrbahn abhebt. In einem Computerprogramm werden daher die zum Abheben führenden Bedingungen simuliert. Hierbei wird angenommen: Das Fahrzeug besitzt im höchsten Punkt S die Geschwindigkeit $v_S = 95\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Über den Punkt S hinaus bewegt es sich ohne Motorkraft; die Bewegung erfolgt reibungsfrei und ohne Bremsungen. Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Geschwindigkeit zu, und das Fahrzeug hebt bereits im Punkt B von der Fahrbahn ab.

Geben Sie zunächst an, in welchem Punkt - beim Befahren der Brücke mit konstanter Geschwindigkeit - die Gefahr des Abhebens am größten ist und begründen Sie dies. Bestimmen Sie durch Berechnung der Strecke h_B die Lage des Punktes B, in dem das Fahrzeug bei der angenommenen Zunahme der Geschwindigkeit den Kontakt zur Fahrbahn verliert.

2.2 Nach Untersuchung der Fahrbedingungen wurde die zulässige Höchstgeschwindigkeit beim Befahren der dargestellten Brücke mit $v_{max} = 80\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ festgelegt.

Begründen Sie diese Festlegung durch Berechnung der zum Abheben im Punkt C führenden Geschwindigkeit v_C ($h_C = 18$ m).
(Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass auf Verkehrsschilderm aus Gründen erhöhter Sicherheit eine um rund 20 % kleinere Geschwindigkeit als die errechnete kritische Geschwindigkeit festgelegt wird.)
Bild 1:



Lösung:

2.1

Gefahr des Abhebens:

Der Körper bleibt solange auf der Kreisbahn wie die Gegenkraft zur Radialkraft, die Normalkraft, nicht übersteigt.

Maximalbedingung: Kräftegleichgewicht $F_N = F_r$

$$F_r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \text{mit} \quad m, r = \text{konst.} \Rightarrow F_r \sim v^2, \text{ da in erster Teilaufgabe } v = \text{konst.} \Rightarrow F_r = \text{konst.}$$

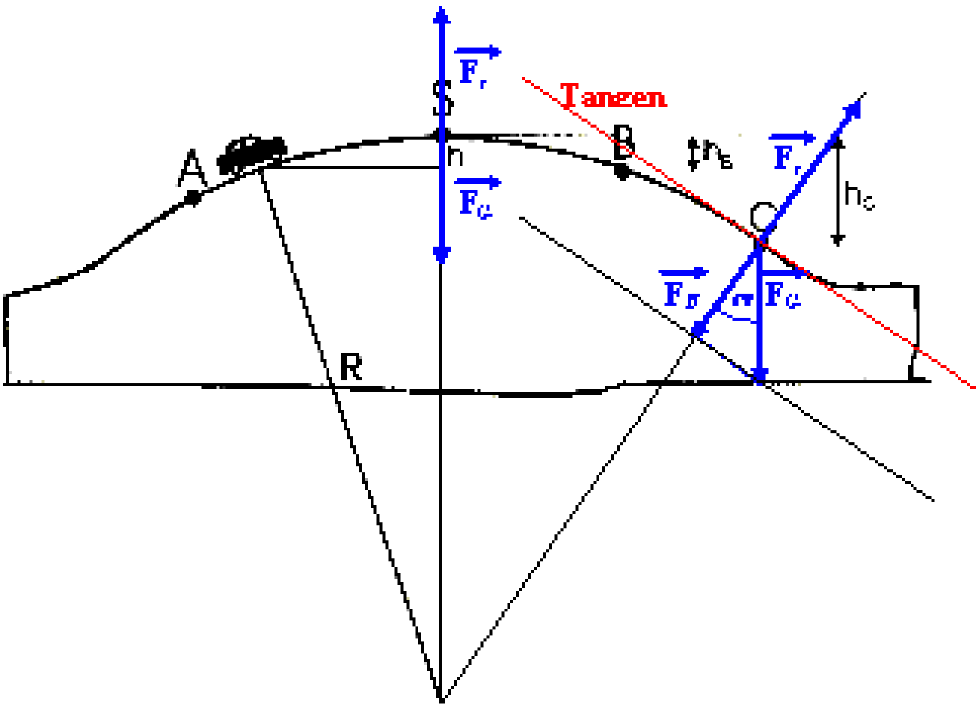
$$\cos\ (\alpha) = \frac{F_N}{F_G} = \frac{F_N}{m \cdot g} \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot \cos\ (\alpha),$$

$$\text{mit} \quad m \cdot g = \text{konst.} \Rightarrow F_N \sim \cos\ (\alpha),$$

da aber α mit zunehmender "Bergabfahrt" zunimmt, bei Änderung des Krümmungsverhaltens (Wendepunkt) ein Maximum annimmt, nimmt F_N ab.

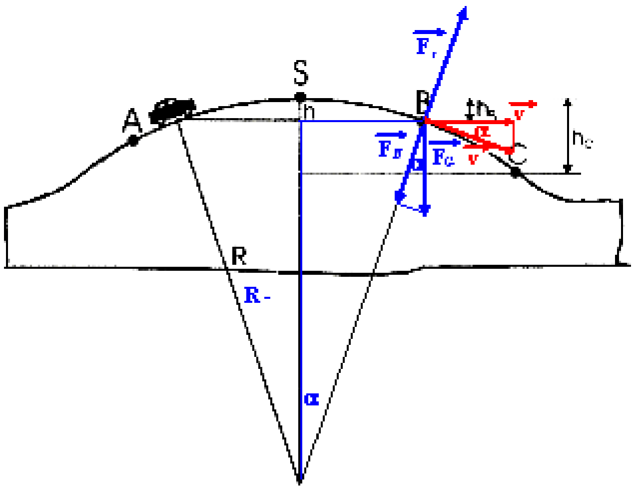
$$\text{z.B.:} \quad \alpha \rightarrow 30° \Rightarrow \cos\ (\alpha) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow F_N \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot m \cdot g \approx 0{,}86 \cdot m \cdot g \approx< m \cdot g$$



Berechnung von h_B:

Körper soll in B abheben $\Rightarrow$ Kräftegleichgewicht $F_N = F_r$



$$F_N = F_r$$

$$F_r = \frac{m \cdot v_B^2}{R}$$

ähnliche Dreiecke:

$$\frac{F_N}{R - h_B} = \frac{F_G}{R}$$

$$F_N = \frac{m \cdot g \cdot (R - h_B)}{R}$$

gleichsetzen:

$$\frac{m \cdot v_B^2}{R} = \frac{m \cdot g \cdot (R - h_B)}{R}$$

$$\frac{v_B^2}{R} = \frac{g \cdot (R - h_B)}{R}$$

$$v_B^2 = g \cdot (R - h_B)$$

$$h_B = -\frac{v_B^2}{g} + R$$

Winkelbeziehungen:

$$\cos(\alpha) = \frac{R - h_B}{R}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_N}{F_G}$$

v_B^2 ist nicht bekannt $\Rightarrow$ über Energiesatz bestimmen:

$$E_{pot_S} + E_{kin_S} = E_{pot_B} + E_{kin_B}$$

$$m \cdot g \cdot h_S + \frac{m}{2} \cdot v_S^2 = m \cdot g \cdot (h_S - h_B) + \frac{m}{2} \cdot v_B^2$$

$$g \cdot h_S + \frac{1}{2} \cdot v_S^2 = g \cdot (h_S - h_B) + \frac{1}{2} \cdot v_B^2$$

$$v_B^2 = 2 \cdot g \cdot (h_S - (h_S - h_B)) + v_S^2 = 2 \cdot g \cdot h_B + v_S^2$$

einsetzen:

$$h_B = -\frac{2\cdot g\cdot h_B + v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$= -\frac{2\cdot g\cdot h_B}{g} - \frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$h_B + \frac{2\cdot g\cdot h_B}{g}$$

$$= -\frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$\frac{g\cdot h_B}{g} + \frac{2\cdot g\cdot h_B}{g} = -\frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$\frac{g\cdot h_B + 2\cdot g\cdot h_B}{g} = -\frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$\frac{3\cdot g\cdot h_B}{g} = -\frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$3\cdot h_B = -\frac{v_S^{\;2}}{g} + R$$

$$h_B = -\frac{v_S^{\;2}}{3\cdot g} + \frac{R}{3}$$

$$h_B = -\frac{\left(\frac{95}{3{,}6}\right)^2 \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}{3\cdot 9{,}81\ \ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} + \frac{100}{3}\mathrm{m} = 23{,}66\,\mathrm{m} - 33{,}33\,\mathrm{m} = \underline{-9{,}67\,\mathrm{m}}$$

2.2

Berechnung der Geschwindigkeit in C:

aus Teilaufgabe 2.1 folgt: $h_C = -\frac{v_C^{\;2}}{g} + R$

$$v_C = \sqrt{g\cdot(\ R - h_C\ )}$$

$$v_C = \sqrt{9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot(100\,\mathrm{m} - 18\,\mathrm{m})} = \underline{28{,}36\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

Angabe in $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$: $\underline{v_C = 102{,}1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}}$

Begründung:

80% von $102{,}1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$: $v_{Schild} = 0{,}8\cdot 102{,}1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 81{,}68\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$

$\Rightarrow$ entspricht etwa dem Richtwert.

oder über

$$v_C = \sqrt{g\cdot R\cdot\cos(\alpha)}$$

$$v_C = \sqrt{9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot 100\,\mathrm{m}\cdot\cos(34{,}9°)} = 28{,}4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

mit $\cos(\alpha) = \frac{R - h_C}{R} = \frac{82\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{m}} = 0{,}82 \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}82) = 34{,}9°$

oder: v_C über Energiesatz berechnen:

$$E_{pot_S} + E_{kin_S} = E_{pot_C} + E_{kin_C}$$

$$m \cdot g \cdot h_S + \frac{m}{2} \cdot v_S^2 = m \cdot g \cdot (h_S - h_C) + \frac{m}{2} \cdot v_C^2$$

$$g \cdot h_S + \frac{1}{2} \cdot v_S^2 = g \cdot (h_S - h_C) + \frac{1}{2} \cdot v_C^2$$

$$v_C^2 = 2 \cdot g \cdot (h_S - (h_S - h_C)) + v_S^2$$

$$= 2 \cdot g \cdot h_C + v_S^2$$

$$v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_C + v_S^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \; m \cdot s^{-2} \cdot 18 \; m + \left(\frac{80}{3{,}6} \right)^2 m^2 \cdot s^{-2}} = 29{,}1 \; m \cdot s^{-1} = \underline{104{,}77 \; km \cdot h^{-1}}$$

Da die Höchstgeschwindigkeit 80 $km \cdot h^{-1}$ beträgt, muß sie als v_C verwendet werden!

3 Rotation einer Kugelschale - Auswertung eines Experimentes

Die beim Durchfahren von Kurven im Straßen- und Schienenverkehr auftretenden Kräfte können im Experiment untersucht werden. Als Experimentiergerät wird die im Bild 2 dargestellte halbkugelförmige Glasschale verwendet. Sie wird mit zunehmender Drehzahl in Drehung um ihre vertikale Achse versetzt. Am Boden der Schale liegt eine kleine Kugel. Wenn diese Kugel ein wenig aus ihrer tiefsten Lage entfernt und eine von der Schale und der Größe der Kugel abhängige Mindestdrehzahl n_{min} erreicht und überschritten wird, wird die Kugel von der sich drehenden Schale erfasst und steigt nach oben. Sie erreicht hierbei eine bestimmte nach der Darstellung im Bild 2 festgelegte Höhe h, in der sie - auf einer Kreisbahn mit dem Radius r - von der sich drehenden Schale mitgeführt wird. Es ist das nach Überschreitung der Mindestdrehzahl n_{min} geltende Gesetz der Abhängigkeit dieser Höhe von der Umdrehungsdauer T der Schale zu ermitteln und anzuwenden.

3.1 Die Umdrehungsdauer T einer Schale mit dem Radius R = 15,0 cm wird auf vier verschiedene konstante Werte eingestellt. Bei Verwendung einer Kugel mit der Masse m = 18,5 g und dem Radius r_k = 1,0 cm werden folgende Messwerte ermittelt:

T in s	0,642	0,553	0,452	0,319
h in m	0,050	0.075	0,100	0,125

Die Messreihe folgt dem funktionalen Zusammenhang $h = c_1 + c_2 \bullet T^2$.

Zeichnen Sie das entsprechende h-T^2 Diagramm und entnehmen Sie aus diesem die speziellen Werte der Konstanten c_1 und c_2 .

3.2 In einem zweiten Experiment mit derselben Schale und den gleichen Drehzahlen wird das Verhalten einer anderen Kugel, die schwerer ist, untersucht. Es wird festgestellt, dass auch diese Kugel die in 3.1 gemessenen Höhen erreicht.

Leiten Sie das Gesetz der Abhängigkeit der Höhe h von der Umdrehungsdauer T der Schale allgemein mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms her. Bestimmen Sie in der abgeleiteten Gleichung die Konstanten c_1 und c_2, und begründen Sie die Beobachtungen des zweiten Experimentes.

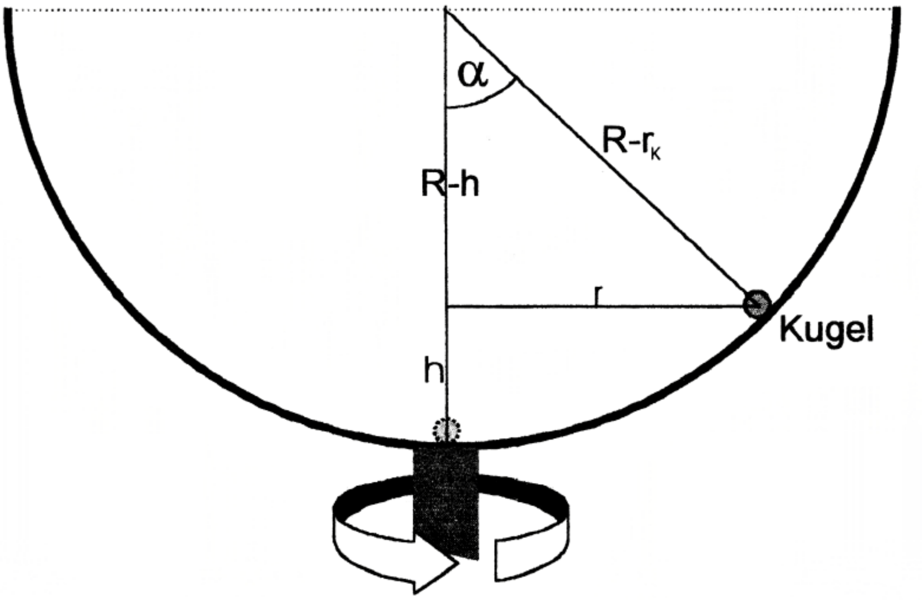
3.3 Eine praktisch wichtige Anwendung ist die Berechnung der Drehzahl n.

Berechnen Sie die Drehzahl n der verwendeten Schale, bei der eine kleine Kugel die Höhe h = 14 cm erreicht, und die Mindestdrehzahl n_{min}, bei der unter den oben genannten Voraussetzungen die Kugel mit dem Radius r_k = 1,0 cm in dieser Schale zu steigen beginnt.
(Hinweis: Die gesuchten Größen können unter Beachtung der geometrischen Beziehungen auch mit der Formel

$$n = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{g}{(R - r_k)\cdot\cos(\alpha)}}$$

berechnet werden.)

Bild 2:



3.1

T^2-h-Diagramm:

Bestimmung der Konstanten in $h = c_2 \cdot T^2 + c_1$:

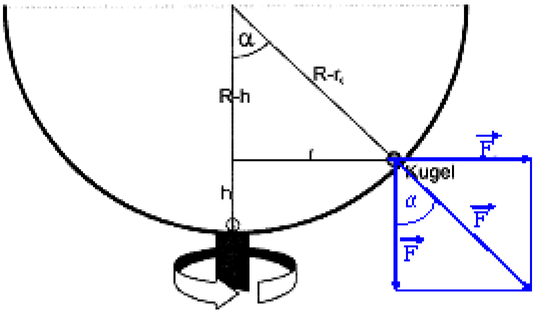
Schnittpunkt mit Ordinate $\Rightarrow$ $\underline{c_1 = 0{,}15\ \text{m}}$

$$c_2 = \frac{\Delta h}{\Delta T^2} = \frac{0,050\,\text{m} - 0,100\,\text{m}}{\left(0,642^2 - 0,452^2\right)\text{s}^2}$$

Anstieg der Geraden: $= -0,24\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$\text{andere Werte:} \Rightarrow \approx -0,25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

3.2.
Kräfteparallelogramm:



Herleitung:

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{R-h} \qquad ; \qquad \tan(\alpha) = \frac{F_r}{F_G} = \frac{m\cdot\frac{v^2}{r}}{m\cdot g} = \frac{v^2}{r\cdot g}$$

gleichsetzen:

$$\frac{r}{R-h} = \frac{v^2}{r\cdot g} \qquad \text{mit} \quad v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$$

$$\frac{r}{R-h} = \frac{4\pi^2\cdot r^2}{r\cdot g\cdot T^2}$$

$$\frac{1}{R-h} = \frac{4\pi^2}{g\cdot T^2} \Rightarrow R-h = \frac{g\cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \underline{h = R - \frac{g\cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Bestimmung der Konstanten:

$$h = R - \frac{g\cdot T^2}{4\ \pi^2} = -\frac{g}{4\ \pi^2}\cdot T^2 + R$$

$$\Rightarrow \underline{c_1 = R = 0,15\,\text{m}}$$

$$c_2 = -\frac{g}{4\pi^2} = -\frac{9,81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{4\pi^2} = \underline{-0,248\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Begründung für gleiche Höhe:

Höhe ist von m und r unabhängig, da sie in der Gleichung nicht enthalten sind!

3.3

Berechnung der Drehzahlen:

mit gegebener Gleichung:

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\left(R - r_K\right) \cdot \cos(\alpha)}}$$

mit $\cos(\alpha) = \dfrac{R - h}{R - r_K} \Rightarrow$ (wenn berechnet: $\alpha = 85{,}9°$)

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\left(R - r_K\right) \cdot \frac{R-h}{R-r_K}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{R-h}}$$

ohne gegebene Gleichung:

$$h = -\frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2 + R$$

mit $n = \dfrac{1}{T}$

$$h = -\frac{g}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} + R \Rightarrow n = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 \cdot \left(R - h\right)}}$$

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{0{,}15\,\mathrm{m} - 0{,}14\,\mathrm{m}}} = \underline{4{,}98\,\mathrm{s}^{-1}}$$

mit gegebener Gleichung:

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\left(R - r_K\right) \cdot \cos(\alpha)}}$$

mit $\cos(\alpha) = 1$ für Minimum $\Rightarrow$

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{R - r_K}}$$

ohne gegebene Gleichung:

$$h = -\frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2 + R$$

mit $h = r_K$ und $n = \dfrac{1}{T}$ und $R = 0$

$$r_K = -\frac{g}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 \cdot \left(R - r_K\right)}}$$

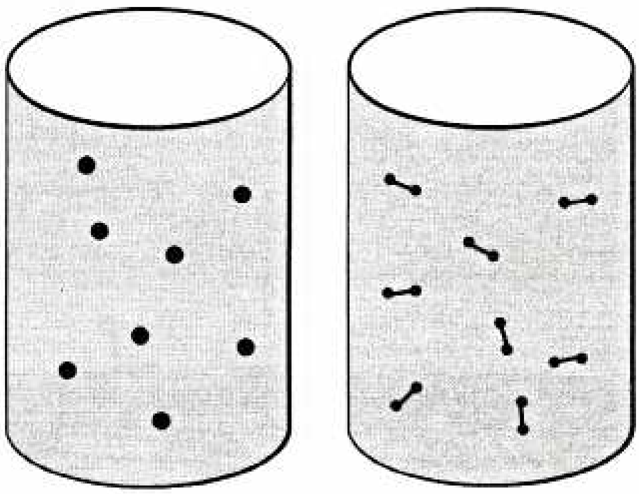
$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{0{,}15\,\mathrm{m} - 0{,}01\,\mathrm{m}}} = \underline{1{,}33\,\mathrm{s}^{-1}}$$

4 Translation und Rotation in der kinetischen Gastheorie

Bild 3 zeigt zwei geschlossene Behälter. Im Behälter 1 befindet sich 1 Mol eines einatomigen Gases. Im Behälter 2 befindet sich 1 Mol eines zweiatomigen Gases. Beide Gase werden als ideale Gase aufgefasst. Sie besitzen die gleiche Temperatur. Beiden Gasen wird die gleiche Wärme Q zugeführt. Obwohl dem zweiatomigen Gas genau so viel Wärme zugeführt wird wie dem einatomigen, erhöht sich die Temperatur des zweiatomigen Gases um einen geringeren Betrag. Wärmeabgabe wird jeweils ausgeschlossen.

Erklären Sie mit Hilfe der kinetischen Gastheorie die unterschiedlich große Temperaturerhöhung nach der Wärmezuführung, und bestimmen Sie das Verhältnis $\Delta T_1 : \Delta T_2$.

Bild 3:



Lösung:

Erklärung: einatomiges Gas: 3 Freiheitsgrade der Translation
Zweiatomiges Gas: 3 Freiheitsgrade der Translation + 2 Freiheitsgrade der Rotation
$\Rightarrow$ 5 Freiheitsgrade

Nach Dulong-Petit: gleichmäßige Verteilung der Energie auf alle Freiheitsgrade

Bestimmung des Verhältnisses:

$$\Delta U = Q = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T \quad \text{mit} \quad f \ \ldots \ \text{Anzahl der Freiheitsgrade}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T_1}{\frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3 \cdot \Delta T_1}{5 \cdot \Delta T_2}$$

mit $Q_1 = Q_2$

$$\underline{3 \cdot \Delta T_1 = 5 \cdot \Delta T_2 \Leftrightarrow \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{5}{3}}$$