Schriftliche Abiturprüfung 2006

Physik 13 k

(Leistungskursniveau)

1 Zustandsänderungen idealer Gase

1.1 Vergleichen Sie mithilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik die isobare mit der isothermen Expansion idealer Gase bezüglich der übertragenen Wärme, der verrichteten mechanischen Arbeit und der inneren Energie.

1.2 Eine abgeschlossene Menge eines einatomigen idealen Gases wird ausgehend vom Zustand 1 (p_1, V_1, T_1) nacheinander folgenden Zustandsänderungen unterworfen:

- isobare Kompression in den Zustand 2 (p_2, V_2, T_2)
- isotherme Expansion in den Zustand 3 (p_3, V_3, T_3)

Daten: $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$

$V_1 = 8{,}0\,\ell$

$T_1 = 500\,\mathrm{K}$

$V_2 = 2{,}0\,\ell$

$V_3 = V_1$

Stellen Sie beide Zustandsänderungen in einem p(V)-Diagramm dar. Berechnen Sie die dazu notwendigen Werte.
Berechnen Sie die Stoffmenge und die übertragenen Wärmen.

2 Technische Probleme bei der Lagerung von Gasen

Bei der Lagerung einer Gasflasche soll der Druck aus Sicherheitsgründen $1{,}2 \cdot 10^6$ Pa nicht überschreiten. In einer Gasflasche mit dem Volumen $V = 50\ \ell$ befinden sich 20 mol Helium mit einer Temperatur von $\vartheta_1 = 20\,°\mathrm{C}$. Das Helium soll als ideales Gas betrachtet werden.

2.1 Berechnen Sie den Druck p_1 bei der Temperatur ϑ_1 und die maximal zulässige Lagertemperatur ϑ_{max}.
(Ergebnis zur Kontrolle: $\vartheta_{max} = 88\,°\mathrm{C}$)

2.2 Erklären Sie den Gasdruck mit der Teilchenbewegung und berechnen Sie die mittlere Teilchengeschwindigkeit bei der maximalen Lagertemperatur.
Um den Höchstdruck nicht zu überschreiten, wird ein Überdruckventil an die Flasche montiert (Bild 1).
Der Kolben mit dem Querschnitt $A = 4{,}0\,\mathrm{cm}^2$ soll sich reibungsfrei bewegen lassen. Die Feder wirkt dem Gasdruck entgegen und ist bei dem Druck $p_0 = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ im ungespannten Zustand. Der Weg des Kolbens vom entspannten Zustand bis zum Öffnen des Ventils beträgt $x = 5{,}0$ cm.

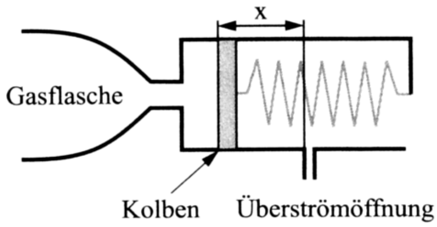


Bild 1

Berechnen Sie die erforderliche Federkonstante D, wenn das Ventil bei einem Druck von $p_{max} = 1{,}2 \cdot 10^6$ Pa öffnen soll. Die Volumenänderung des Gases und die Reibung können vernachlässigt werden.
Durch eine Havarie erhöht sich die Temperatur des Gases auf $\vartheta_2 = 95\,°\mathrm{C}$. Dabei entweicht ein Teil des Gases durch das Überdruckventil. Berechnen Sie die Masse des ausgeströmten Gases.

3 Versuch von Stern

Mit dem Versuch von Stern kann man die Geschwindigkeitsverteilung von Atomen in einem Dampf aus Silberatomen untersuchen. Dazu verwendet man eine Versuchsanordnung, deren schematischer Aufbau im Bild 2 zu sehen ist.

Ein versilberter Platindraht D befindet sich auf der Symmetrieachse zweier konzentrisch angeordneter und starr miteinander verbundener Kupferzylinder, die drehbar gelagert sind und deren Radien die Differenz a haben. Der innere Zylinder besitzt eine Spaltblende S. Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum. Wird der Platindraht erhitzt, tritt Dampf des Silbers durch die Spaltöffnung und setzt sich auf der Wand des äußeren Zylinders als Niederschlag ab. Beschreiben Sie die Beobachtungsergebnisse dieses Versuches bei ruhender und sich drehender Anordnung. Deuten Sie die Beobachtungen.

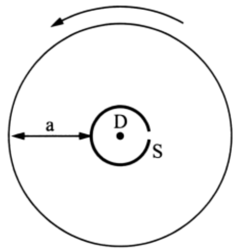


Bild 2

Lösung:

1. Zustandsänderungen idealer Gase

1.1 $1.\text{HS}: \quad \Delta U = Q + W_V$

<u>isobare Expansion</u>

$p = \text{konst.}$

$$\text{Expansion}: \quad W = -\int_{V_A}^{V_E} p\ dV$$

$V_E > V_A \Rightarrow W_V < 0$

Arbeit wird vom System abgegeben

$$\text{mit} \quad \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_E}{T_E} \Rightarrow T_E > T_A$$

Temperaturanstieg: $\Delta U > 0$

innere Energie des Systems nimmt zu

mit 1. HS: $Q = \Delta U - W_V < 0 \Rightarrow Q > 0$

oder: $Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T > 0$

Dem System wird Wärme zugeführt

<u>isotherme Expansion</u>

$T = \text{konst.} \Rightarrow \Delta U = 0$

$\Rightarrow Q = -W_V$

$$\text{Expansion}: \quad W = -\int_{V_A}^{V_E} p\ dV$$

$V_E > V_A \Rightarrow W_V < 0$

Arbeit wird vom System abgegeben

mit 1. HS $\Rightarrow Q > 0$

Dem System wird Wärme zugeführt

1.2

Zustand	p in 10^6 Pa	V in ℓ	T in K
1	1,2	8,0	500
2	***1,2***	2,0	***125***
3	***0,3***	8,0	***125***

<u>Isobare Kompression:</u>

$p = \text{konst.} \Rightarrow p_1 = p_2$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cdot V_2}{V_1} = \frac{500\,\text{K} \cdot 2{,}0\,\ell}{8{,}0\,\ell} = \underline{125\,\text{K}}$$

<u>Isotherme Expansion:</u>

$T = \text{konst.} \Rightarrow T_2 = T_3 = 125\,\text{K}$

$$p_2 \cdot V_2 = p_3 \cdot V_3 \Rightarrow p_3 = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_3} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot 2{,}0\,\ell}{8{,}0\,\ell} = \underline{0{,}3 \cdot 10^6\,\text{Pa}}$$

Berechnung von 3 (mindestens) Zwischenwerten für Isotherme:

$$V_{3,1} = 3\,\ell \Rightarrow p_{3,1} = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot2,0\,\ell}{3,0\,\ell} = 0,80\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$$

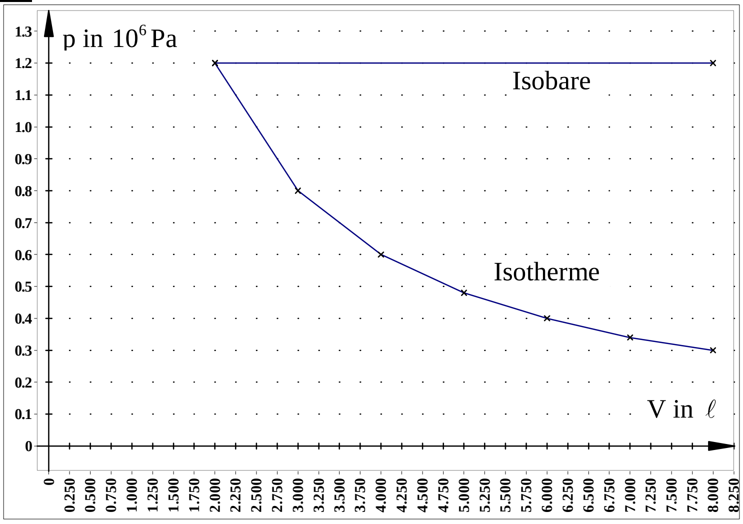
$$V_{3,2} = 4\,\ell \Rightarrow p_{3,2} = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot2,0\,\ell}{4,0\,\ell} = 0,60\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$V_{3,3} = 5\,\ell \Rightarrow p_{3,3} = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot2,0\,\ell}{5,0\,\ell} = 0,48\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$V_{3,4} = 6\,\ell \Rightarrow p_{3,4} = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot2,0\,\ell}{6,0\,\ell} = 0,40\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$V_{3,5} = 7\,\ell \Rightarrow p_{3,5} = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot2,0\,\ell}{7,0\,\ell} = 0,34\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$$

<ins>Graph:</ins>



<ins>Stoffmenge:</ins>

$$p_1\cdot V_1 = n\cdot R\cdot T_1$$

$$n = \frac{p_1\cdot V_1}{R\cdot T_1}$$

$$n = \frac{1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot8,0\,\mathrm{dm}^{-3}}{8,314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot500\,\mathrm{K}} = \underline{2,31\,\mathrm{mol}}$$

$$[n] = \frac{\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{dm}^{-3}}{\mathrm{J}\cdot\cancel{\mathrm{K}^{-1}}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\cancel{\mathrm{K}}} = \frac{\cancel{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot10^{-3}\mathrm{m}^{-3}}{\cancel{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{mol}^{-1}} = 10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

<ins>isobar übertragene Wärme $Q_{1,2}$:</ins>

$$Q_{1,2} = \Delta U_{1,2} - W_{V_{1,2}}$$

$$W_{1,2} = -p_1\cdot\left(V_2 - V_1\right)$$

$$W_{1,2} = -1,2\cdot10^6\,\mathrm{Pa}\cdot\left(2-8\right)\mathrm{dm}^3 = 7,2\cdot10^3\,\mathrm{J} = 7,20\,\mathrm{kJ}$$

$$\left[W_{1,2}\right] = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{dm}^3 = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot10^{-3}\mathrm{m}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{Nm} = 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U_{1,2} = \frac{3}{2}\cdot n\cdot R\cdot\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\Delta U_{1,2} = \frac{3}{2}\cdot2,31\,\mathrm{mol}\cdot8,314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\left(125-500\right)\mathrm{K} = -10,80\,\mathrm{kJ}$$

$$\Rightarrow Q_{1,2} = -10,80\,\mathrm{kJ} - 7,20\,\mathrm{kJ} = \underline{-18,0\,\mathrm{kJ}}$$

besser:

$$Q_{1,2} = \Delta U_{1,2} - W_{V_{1,2}}$$

$$W_{V_{1,2}} = -p_1 \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \qquad \text{mit } p_1 \cdot (V_2 - V_1) = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot p_1 \cdot (V_2 - V_1)$$

$$Q_{1,2} = \frac{3}{2} \cdot p_1 \cdot (V_2 - V_1) + p_1 \cdot (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} \cdot p_1 \cdot (V_2 - V_1)$$

$$Q_{1,2} = \frac{5}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot (2-8)\,\text{dm}^3 = -18 \cdot 10^3\,\text{J} = \underline{-18\,\text{kJ}}$$

$$[W_{1,2}] = \text{Pa} \cdot \text{dm}^3 = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = 10^{-3}\,\text{Nm} = 10^{-3}\,\text{J}$$

<u>Isotherm übertragene Wärme $Q_{2,3}$: :</u> (Gleichung nicht im Tafelwerk ⇒ Integral)

$$Q_{2,3} = -W_{V_{2,3}}$$

$$W = -\int_{V_A}^{V_E} p\, dV \quad \text{mit } p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

$$W = -n \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_A}^{V_E} \frac{1}{V} dV = -n \cdot R \cdot T \cdot \left[\ln(V)\right]_{V_A}^{V_E}$$

$$W = -n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$$

$$Q_{2,3} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 2{,}31\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 125\,\text{K} \cdot \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \underline{3{,}33\,\text{kJ}}$$

2. Technische Probleme bei der Lagerung von Gasen

2.1

<u>Druckberechnung:</u>

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$$

$$p_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V_1}$$

$$p_1 = \frac{20\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 293\,\text{K}}{50\,\text{dm}^3} = \underline{974{,}41\,\text{kPa}}$$

$$[p_1] = \frac{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{J} \cdot \cancel{\text{K}^{-1}} \cdot \cancel{\text{mol}^{-1}} \cdot \cancel{\text{K}}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{J}}{10^{-3}\text{m}^3} = 10^3\,\frac{\text{N}\,\text{m}}{\text{m}^3} = 10^3\,\text{Pa}$$

<u>Maximale Temperatur:</u>

$$p_{max} \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_{max}$$

$$T_{max} = \frac{p_{max} \cdot V_1}{n \cdot R}$$

$$T_{max} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot 50\,\text{dm}^3}{20\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}} = \underline{360{,}84\,\text{K}} \Rightarrow \vartheta_{max} = 87{,}84\,°\text{C}$$

$$[T_{max}] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{dm}^3}{\cancel{\text{mol}} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \cancel{\text{mol}^{-1}}} == \frac{\cancel{\text{N}} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 10^{-3}\text{m}^3}{\cancel{\text{N}} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}} = 10^{-3}\,\text{K}$$

2.2

Erklärung – Gasdruck:

- Teilchen besitzen Masse und Geschwindigkeit, also Impuls $p = m \cdot \overline{v}$
- elastische Stöße gegen Gefäßwand: Impulsänderung $\Delta p = 2 \cdot m \cdot \Delta\overline{v}$
- beim Stoß übertragen Teilchen Impuls auf Gefäßwand
- Kraftstoß $F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}$
- Stoß erfolgt auf Wand der Fläche A
- Druck auf Gefäßwand $p = \frac{F}{A}$

Berechnung – mittlere Teilchengeschwindigkeit:
(mit Gleichungen des Tafelwerks)

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T_{max}}{M_r}} \qquad \text{bzw.:} \qquad \overline{v} = \sqrt{3 \cdot R_S \cdot T}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314\,J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot 360{,}84\,K}{4 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot mol^{-1}}} \qquad \overline{v} = \sqrt{3 \cdot 2{,}077 \cdot 10^3\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1} \cdot 360{,}84\,K}$$

$$\overline{v} = \underline{1500{,}0\,m \cdot s^{-1}} \qquad \overline{v} = \underline{1499{,}5\,m \cdot s^{-1}}$$

$$\left[\overline{v}\right] = \sqrt{\frac{J \cdot \cancel{K^{-1}} \cdot \cancel{mol^{-1}} \cdot \cancel{K}}{kg \cdot \cancel{mol^{-1}}}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{kg}} = m \cdot s^{-1}$$

besser: : (Rahmenplan: Freiheitsgrade und Maxwellverteilung)

$$\overline{E_{kin}} = \frac{m_T}{2} \cdot \overline{v}^2 = \frac{f}{2} \cdot k \cdot T \qquad \text{mit } f = 3$$

$$\overline{v} = 0{,}921 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_T}} \qquad \text{mit } m_T = \frac{M_r}{N_A} = \frac{M_r}{\frac{k}{R}} = \frac{M_r \cdot k}{R}$$

$$\overline{v} = 0{,}921 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T \cdot R}{M_r \cdot k}} = 0{,}921 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M_r}}$$

$$\overline{v} = 0{,}921 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314\,J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot 360{,}84\,K}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot mol^{-1}}} = \underline{1381{,}5\,m \cdot s^{-1}}$$

ohne Korrekturfaktor: $1500{,}0\,m \cdot s^{-1}$

$$\left[\overline{v}\right] = \sqrt{\frac{J \cdot \cancel{K^{-1}} \cdot \cancel{mol^{-1}} \cdot \cancel{K}}{kg \cdot \cancel{mol^{-1}}}} = \sqrt{\frac{\cancel{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{\cancel{kg}}} = m \cdot s^{-1}$$

2.3

Federkonstante D:

$$F_{Feder} = F_{Druck}$$

$$D \cdot x = \Delta p \cdot A$$

$$D = \frac{\Delta p \cdot A}{x}$$

$$D = \frac{1{,}1 \cdot 10^6\,Pa \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,m^2}{5 \cdot 10^{-2}\,m} = \underline{8{,}8\,kN \cdot m^{-1}}$$

$$[D] = \frac{Pa \cdot m^2}{m} = \frac{N \cdot m^{-2} \cdot m^2}{m} = N \cdot m^{-1}$$

Masse des ausströmenden Gases:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad \text{mit } n = \frac{m}{M_r} \text{ und } V = \text{konst.}$$

$$p \cdot V = \frac{m}{M_r} \cdot R \cdot T$$

$$m_0 = \frac{p_0 \cdot V \cdot M_r}{R \cdot T_0}; \qquad m_1 = \frac{p_{max} \cdot V \cdot M_r}{R \cdot T_{max}}$$

$$\Delta m = \frac{V \cdot M_r}{R} \cdot \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_{max}}{T_{max}} \right)$$

$$\Delta m = \frac{50\,dm^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \cdot \left(\frac{0{,}974 \cdot 10^6\,Pa}{293\,K} - \frac{1{,}2 \cdot 10^6\,Pa}{368\,K} \right) = 0{,}00152\,kg = \underline{1{,}52\,g}$$

$$[\Delta m] = \frac{dm^3 \cdot kg \cdot \cancel{mol^{-1}}}{J \cdot \cancel{K^{-1}} \cdot \cancel{mol^{-1}}} \cdot \frac{Pa}{\cancel{K}} = \frac{10^{-3} m^3 \cdot kg \cdot \cancel{N} \cdot m^{-2}}{\cancel{N} \cdot m} = 10^{-3} kg$$

oder besser: (und logischer)

$$\Delta m = \rho_{max} \cdot \Delta V$$

mit

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p_{max} \cdot V_{max}}{T_{max}} \qquad \text{mit } V = \frac{m}{\rho}$$

$$\frac{p_0 \cdot \frac{m}{\rho_0}}{T_0} = \frac{p_{max} \cdot \frac{m}{\rho_{max}}}{T_{max}} \Leftrightarrow \frac{p_0}{T_0 \cdot \rho_0} = \frac{p_{max}}{T_{max} \cdot \rho_{max}}$$

$$\rho_{max} = \frac{\rho_0 \cdot T_0 \cdot p_{max}}{T_{max} \cdot p_0}$$

und

$$\Delta V = V_{max} - V_1 \qquad \text{mit } V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}$$

$$\Delta V = \frac{n \cdot R \cdot T_{max}}{p_{max}} - \frac{n \cdot R \cdot T_1}{p_1} = n \cdot R \cdot \left(\frac{T_{max}}{p_{max}} - \frac{T_1}{p_1} \right)$$

ergibt sich:

$$\Delta m = \frac{n \cdot R \cdot \rho_0 \cdot T_0 \cdot p_{max}}{T_{max} \cdot p_0} \cdot \left(\frac{T_{max}}{p_{max}} - \frac{T_1}{p_1} \right)$$

$$\Delta m = \frac{20\,mol \cdot 8{,}314\,J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot 0{,}18\,kg \cdot m^{-3} \cdot 273\,K \cdot 1{,}2 \cdot 10^6\,Pa}{368\,K \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\,Pa} \cdot \left(\frac{368\,K}{1{,}2 \cdot 10^6\,Pa} - \frac{293\,K}{0{,}975 \cdot 10^6\,Pa} \right)$$

$$\Delta m = 0{,}00162\,kg = \underline{1{,}62\,g}$$

$$[\Delta m] = \frac{\cancel{mol} \cdot J \cdot \cancel{K^{-1}} \cdot \cancel{mol^{-1}} \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot \cancel{K} \cdot \cancel{Pa}}{\cancel{K} \cdot Pa} \cdot \frac{\cancel{K}}{\cancel{Pa}} = \frac{J \cdot kg \cdot m^{-3}}{Pa} = \frac{\cancel{N} \cdot m \cdot kg \cdot m^{-3}}{\cancel{N} \cdot m^{-2}} = kg$$

3. Experimentelle Bestimmung von Teilchengeschwindigkeiten

<u>Beobachtungsergebnisse:</u>

- ruhende Anordnung
  - Silberatome treffen in einem eng begrenzten Gebiet in geradliniger Verlängerung von D durch die Mitte des Spaltes auf dem äußeren Zylinder auf
- rotierende Anordnung
  - kein eng begrenztes Auftreffgebiet
  - Ausbildung eines länglichen Streifens als Auftreffgebiet

<u>Deutung:</u>

- Für das Auftreffgebiet in Ruhe ist die Geschwindigkeit der Teilchen irrelevant; alle Teilchen kommen an gleicher Stelle an – früher oder später.
- Rotation der Anordnung: Geschwindigkeit der Silberatome ist nicht konstant
- Teilchen mit hoher Geschwindigkeit kommen früher auf dem äußeren Zylinder an – Auftreffpunkt auf dem „Ruhegebiet", Teilchen mit geringer Geschwindigkeit später - Auftreffpunkt nach dem „Ruhegebiet" $\Rightarrow$ Ausbildung eines Streifens
- Geschwindigkeit der Silberatome schwankt um einen Mittelwert
- Es gilt die Maxwell-Boltzmann-Verteilung
- Bei der Angabe von Geschwindigkeiten von Gasteilchen wird stets nur eine Mittelwert $\bar{v}$ angegeben, um den die Geschwindigkeit der Teilchen streut.
- Da die Geschwindigkeitsverteilung keine Gaußsche Normalverteilung darstellt, wird als Korrekturfaktor 0,921 verwendet $\Rightarrow \bar{v} = 0{,}921 \cdot \sqrt{\overline{v^2}}$