Abitur - Leistungskurs Mathematik
(Erhöhtes Anforderungsniveau)

Sachsen-Anhalt 2013

Pflichtaufgabe 1: Analysis

Pflichtaufgabe 1

Für jedes $a \in R,\ a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = a\,x + 1 - e^{-x},\ x \in R$
Die Graphen der Funktion f_a seien G_a.

a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf lokale Extrempunkte sowie auf Wendepunkte und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte sowie die Art der lokalen Extrempunkte an.

Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = ax + 1$ Asymptoten der Graphen G_a für $x \to -\infty$ sind.

b) Mit $a = e$ ist die Funktion f_e eine der Funktionen f_a.
Zeigen Sie, dass $x_1 = 0$ Nullstelle der Funktion f ist und begründen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f im Intervall [1; 2] eine weitere Nullstelle x2 hat.

Berechnen Sie diese Nullstelle x_2 mithilfe des NEWTON-Verfahrens auf Hundertstel genau.

Begründen Sie, dass die Funktion f außer x_1 und x_2 keine weiteren Nullstellen besitzt.

Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall [–2; 2,5] in ein kartesisches Koordinatensystem.

c) Der Graph G_e und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

d) Erklären Sie durch Betrachtung geometrischer Körper, dass

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} \left[f_e(x)\right]^2 dx < \pi \cdot \left[f_e(1)\right]^2 \cdot (x_2 - x_1)$$

gilt, wobei x_1 und x_2 die im Aufgabenteil b) betrachteten Nullstellen sind.

Lösung:

a) Extrempunkt:

$$f(x) = a \cdot x + 1 - e^x$$
$$f'(x) = a - e^x$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$a - e^x = 0$$
$$e^x = a \quad |\ln$$
$$x_E = \ln(a)$$

$$f''(x) = -e^x$$
$$f''(\ln(a)) = -e^{\ln(a)} = -a < 0 \Rightarrow x_E = \ln(a) \text{ ist Extremstelle}$$
$$f(\ln(a)) = a \cdot \ln(a) + 1 - e^{\ln(a)} = a \cdot \ln(a) + 1 - a = a \cdot (\ln(a) - 1) + 1$$
$$\Rightarrow \underline{H(\ln(a) \mid a \cdot (\ln(a) - 1) + 1)}$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = -e^x = 0$$
$$e^x \neq 0 \Rightarrow \text{ kein Wendepunkt}$$

Asymptoten nachweisen:

$$\lim_{x \to -\infty} (a \cdot x + 1 - e^x - a \cdot x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = -e^{-\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} = 0 \quad \text{(Nullfolge)}$$
$$\Rightarrow \quad a(x) = y = e \cdot x + 1 \text{ Asymptote (lineare Fkt)}$$

Ortskurve der Hochpunkte:

$$H(\ln(a) \mid a \cdot (\ln(a) - 1) + 1)$$
$$f_0(x) = a \cdot (\ln(a) - 1) + 1 \qquad \text{mit} \quad x = \ln(a) \Rightarrow a = e^x$$
$$f_0(x) = e^x \cdot (x - 1) + 1 = \underline{x \cdot e^x - e^x + 1}$$

b)

Zeigen der Nullstelle:

$$f(0) = e \cdot 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Zwischenwertsatz: weitere Nullstelle im Intervall $[1;2]$

(1) $f(x)$ in $[1;2]$ stetig

(2) $\left.\begin{matrix} f(1) = 1 \\ f(2) \approx -0{,}95 \end{matrix}\right\} f(1) \neq f(2)$

Newton-Verfahren:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{Startwert: } x_1 = 2$$

$$x_2 = 2 - \frac{2\cdot e + 1 - e^2}{e - e^2} \qquad \approx 1{,}796$$

$$\approx 1{,}753$$

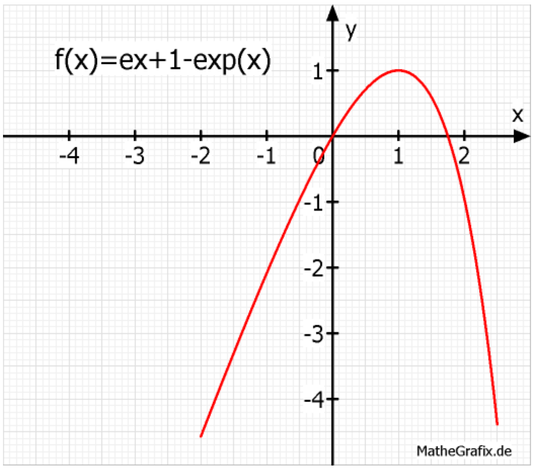
$$\approx 1{,}750$$

$$\Rightarrow \underline{x_2 \approx 1{,}75}$$

<u>Begründung für keine weiteren Nullstellen:</u>

- f ist stetig und differenzierbar
- nur ein Hochpunkt und zwei Nullstellen
- keine Wendepunkte $\Rightarrow$ nur zwei Nullstellen

<u>Graph im Intervall</u> $[-2; 2{,}5]$:



c) <u>Flächenberechnung:</u>

$$A = \int_0^{1{,}75} \left(e\cdot x + 1 - e^{-x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot e\cdot x^2 + x - e^x\right]_0^{1{,}75}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e\cdot 1{,}75^2 + 1{,}75 - e^{1{,}75} - (-1) = \underline{1{,}16 \text{ FE}}$$

d) <u>Erklärung mit geometrischen Körpern:</u>

$$\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}\left[f_e(x)\right]^2 dx \qquad < \qquad \pi\cdot\left[f_e(1)^2\cdot(x_2 - x_1)\right]$$

Rotationskörper — Zylinder der Höhe $(x_2 - x_1)$

um x – Achse — und des Grundkreisradiusses $f(1)$

Zylinder schließt den Flächeninhalt oberhalb der Kurve mit ein.

$$\Rightarrow V_{Rotation} < V_{Zylinder}$$