Abitur - Leistungskurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 1994

Gebiete L1 und L3 - Analysis

Aufgabe 1.1.

Gegeben sind die Funktionenscharen f_a und g_m durch

$$f_a: \quad y = f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4 \quad a \quad x \quad , a, x \in R, a > 0$$

$$g_m: \quad y = g_m(x) = m\,x \qquad , \quad m, x \in R; m > 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Graphen aller Funktionen der Schar f_a punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind.
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar f_a.
Ermitteln Sie die Art der lokalen Extrempunkte.
Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen der Funktionen der Schar f_a.
Zeigen Sie, dass alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen von f_a auf dem Graphen (Ortskurve) genau einer ganzrationalen Funktion dritten Grades liegen.
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 für $-4 \le x \le 4$.

b) Zeigen Sie , dass es Graphen von Funktionen der Schar g_m gibt, die den Graphen von f_1 in genau drei Punkten A_m, B_m und C schneiden.
Berechnen Sie für diese Fälle die Werte des Parameters m und die Koordinaten der Schnittpunkte.

$$\left[\text{Teilergebnis zur Kontrolle:} A_m\left(-\sqrt{12-3 \quad m} \mid -m\sqrt{12-3 \quad m}\right)\right]$$

Jeder Graph dieser Funktionen aus g_m, die x-Achse sowie Parallelen zu y-Achse durch die entsprechenden Punkte A_m und B_m begrenzen zwei Dreiecke.
Berechnen Sie m für den Fall, daß die Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte dieser Dreiecke maximal wird.

c) Der Graph der Funktion f_1 und die positive x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig, deren Inhalt die Maßzahl 12 besitzt.
Es gibt Graphen von Funktionen der Schar g_m (siehe Aufgabe b), die diese Fläche in zwei Teilflächen zerlegen.
Bestimmen Sie m für den Fall, dass diese durch g_m erzeugten Teilflächen den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung:

a)

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung:

$$f_a(x) = -f_a(-x)$$
$$-\frac{1}{3}x^3 + 4ax = -\left(\frac{1}{3}x^3 + 4ax\right)$$
$$-\frac{1}{3}x^3 + 4ax = -\frac{1}{3}x^3 + 4ax$$

Nullstellen:

$$-\frac{1}{3}x^3 + 4ax = 0$$
$$x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4a\right) = 0$$
$$\underline{x_{0_1} = 0} \qquad \vee \qquad -\frac{1}{3}x^2 + 4a = 0$$
$$12 = x^2$$
$$\underline{x_{0_2} = 2 \cdot \sqrt{3a}} \quad ; \quad \underline{x_{0_3} = -2 \cdot \sqrt{3a}}$$

Ableitungen:

$$f_a'(x) = -x^2 + 4a$$
$$f_a''(x) = -2x$$
$$f_a'''(x) = -2$$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = -x^2 + 4 \quad a = 0$$
$$x_{E_1} = 2 \cdot \sqrt{a} \quad ; \quad x_{E_2} = -2 \cdot \sqrt{a}$$
$$f''\left(2 \cdot \sqrt{a}\right) = -2 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{a}\right) = -4 \cdot \sqrt{a} < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$
$$f''\left(-2 \cdot \sqrt{a}\right) = -2 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{a}\right) = 4 \cdot \sqrt{a} > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$
$$f\left(2 \cdot \sqrt{a}\right) = -\frac{1}{3} \cdot 8a\sqrt{a} + 4a \cdot 2\sqrt{a} = -\frac{8}{3}a\sqrt{a} + 8a\sqrt{a} = \frac{16}{3}a \cdot \sqrt{a}$$
$$f\left(-2 \cdot \sqrt{a}\right) = \frac{1}{3} \cdot 8a\sqrt{a} - 4a \cdot 2\sqrt{a} = \frac{8}{3}a\sqrt{a} - 8a\sqrt{a} = -\frac{16}{3}a \cdot \sqrt{a}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{H\left(2 \cdot \sqrt{a} \,|\, \frac{16}{3}a \cdot \sqrt{a}\right)} \quad ; \quad \underline{T\left(-2 \cdot \sqrt{a} \,|\, -\frac{16}{3}a \cdot \sqrt{a}\right)}$$

Wendepunkte:

$$f_a''(x) = -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$
$$f_a'''(0) = -2 \neq 0 \Rightarrow W$$
$$f_a(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \underline{W(0\,|\,0)}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3+4ax\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{4a}{x^2}\right)=\infty\cdot\left(-\frac{1}{3}+0\right)=\underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3+4ax\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{4a}{x^2}\right)=-\infty\cdot\left(-\frac{1}{3}-0\right)=\underline{+\infty}$$

Ortskurve der Extrempunkte:

$$H\left(2\sqrt{a}\,\middle|\,\frac{16}{3}a\sqrt{a}\right) \qquad T\left(-2\sqrt{a}\,\middle|\,-\frac{16}{3}a\sqrt{a}\right)$$

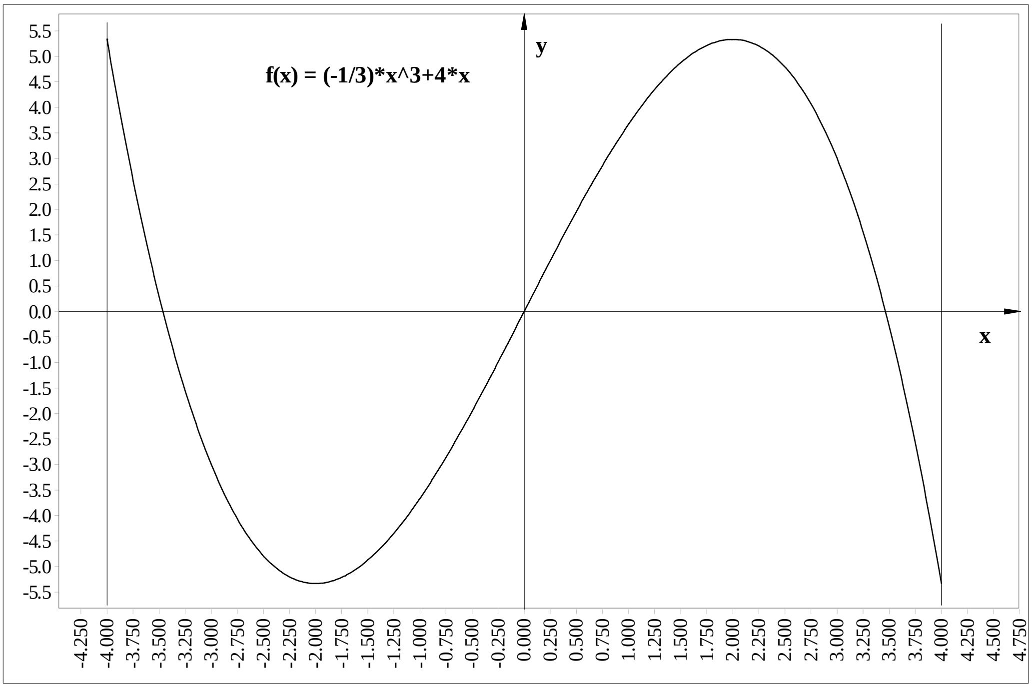
$$x=2\sqrt{a}\Rightarrow a=\frac{x^2}{4} \qquad x=-2\sqrt{a}\Rightarrow a=\frac{x^2}{4}$$

$$y=\frac{16}{3}a\sqrt{a}=\frac{16}{3}\cdot\frac{x^2}{4}\sqrt{\frac{x^2}{4}} \qquad y=-\frac{16}{3}a\sqrt{a}=\frac{16}{3}\cdot\frac{x^2}{4}\sqrt{\frac{x^2}{4}}$$

$$y=\frac{4}{3}x^2\cdot\frac{x}{2}=\frac{2}{3}x^3 \qquad y=\frac{4}{3}x^2\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{3}x^3$$

$\Rightarrow$ gemeinsame Ortskurve: $\underline{y=\frac{2}{3}x^3}$

Graph:



b)

Schnittpunkte:

$$f_1(x) = g_m(x)$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + 4x = mx$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + 4x - mx = 0$$

$$x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4 - m\right) = 0$$

$$x_{S_1} = 0 \qquad \vee \qquad -\frac{1}{3}x^2 + 4 - m = 0$$

$$x^2 = 12 - 3m$$

$$x_{S_2} = -\sqrt{12-3m} \quad ; \quad x_{S_3} = -\sqrt{12-3m}$$

$$f\left(x_{S_1}\right) = 0 \Rightarrow \underline{C(0|0)}$$

$$f\left(x_{S_2}\right) = f\left(-\sqrt{12-3m}\right) = -m \cdot \sqrt{12-3m} \Rightarrow \underline{A_m\left(-\sqrt{12-3m}\,|-m \cdot \sqrt{12-3m}\right)}$$

$$f\left(x_{S_3}\right) = f\left(\sqrt{12-3m}\right) = m \cdot \sqrt{12-3m} \Rightarrow \underline{B_m\left(\sqrt{12-3m}\,|\,m \cdot \sqrt{12-3m}\right)}$$

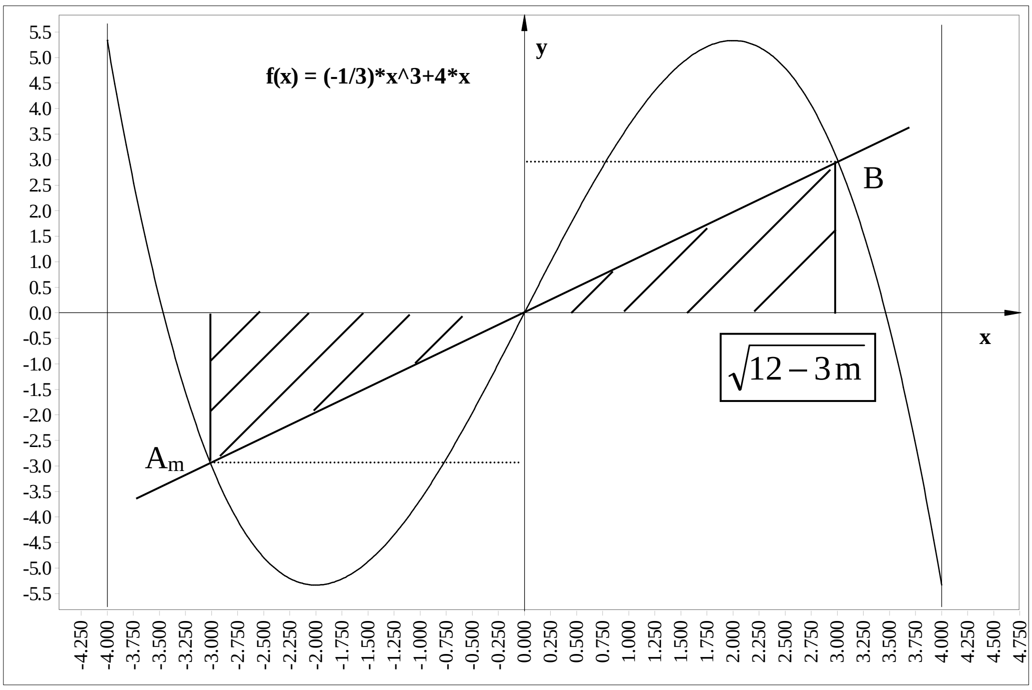
Wert des Parameters m:

$\sqrt{12-3\ m}$ muß definiert sein

$\Rightarrow 12 - 3m > 0 \Rightarrow 3m < 12 \Rightarrow \underline{m < 4}$

Gleichheit braucht wegen x_{S_1} nicht betrachtet werden!

maximale Flächeninhalte:



$A = 2 \cdot A_{\Delta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

$A = g \cdot h_g = \sqrt{12-3m} \cdot m \cdot \sqrt{12-3m} = m \cdot (12-3m)$

$A = 12m - 3m^2$

$A'(m) = 12 - 6m = 0 \Rightarrow \underline{m_E = 2}$; $A''(m) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max}$

c)

$A_{f_1} = 12\,\text{FE} \Rightarrow$ durch g_m erzeugte Teilflächen gleich groß

$\Rightarrow A = 6\,\text{FE}$

$$6 = \int_0^{\sqrt{12-3m}} \left(f_1(x) - g_m(x)\right)dx = \int_0^{\sqrt{12-3m}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x - mx\right)dx$$

$$6 = \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2 - \frac{m}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{12-3m}}$$

$$6 = -\frac{1}{12} \cdot (12-3m)^2 + 2 \cdot (12-3m) - \frac{m}{2} \cdot (12-3m)$$

$$6 = -\frac{1}{12} \cdot \left(144 - 72m + 9m^2\right) + 24 - 6m - 6m + \frac{3}{2}m^2$$

$$6 = -12 + 6m - \frac{3}{4}m^2 + 24 - 6m - 6m + \frac{3}{2}m^2$$

$$6 = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{2}m^2 - 6m + 12$$

$$\frac{3}{4}m^2 - 6m + 6 = 0$$

$$m^2 - 8m + 8 = 0$$

$$m_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-8} = 4 \pm 2 \cdot \sqrt{2}$$

mit $m < 4 \Rightarrow \underline{m = 4 - 2 \cdot \sqrt{2}} \approx 1{,}17$

Aufgabe 1.2.

Eine Funktion f hat die Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{4\sin(x)+5}{\cos^2(x)}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f weder symmetrisch zur y-Achse , noch symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f die Koordinatenachsen schneidet.
Ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte.
Alle Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion f sind lokale Minimumstellen.
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Minimumpunkte des Graphen der Funktion f in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f.

$$\left[\text{Zwischenergebnis zur Kontrolle: z.B. } f'(x) = 2\cdot\frac{2\sin^2(x)+5\sin(x)+2}{\cos^3(x)}\right]$$

Berechnen Sie für die in nebenstehender Wertetabelle genannten Argumente die Funktionswerte f(x):

x	-1	$\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
f(x)				

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion unter Verwendung der in den bisherigen Aufgabenstellungen geforderten Ergebnisse im Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

c) Im Punkt $P_0(\pi \mid f(\pi))$ berührt die Tangente t den Graphen der Funktion f. Sie schneidet die x-Achse im Punkt S_1.
Die Normale zur Tangente im Punkt P_0 sei n. Sie schneidet die x-Achse im Punkt S_2.
Ermitteln Sie je eine Gleichung für die Geraden t und n.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2.

$$\left[\text{Ergebnis zur Kontrolle: } S_1\left(\frac{5}{4}+\pi \mid 0\right), S_2\left(\pi-20 \mid 0\right)\right]$$

Die Punkte S_1, S_2 und P_0 sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie von diesem Dreieck das Gradmaß zweier Innenwinkel und die Maßzahl des Flächeninhaltes.

d) Der Graph der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = \pi$ und $x = \frac{4\pi}{3}$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Lösung:

a)

$\underline{\text{maximaler Definitionsbereich:}}$

$$\cos^2(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2};\quad k \in Z$$

$$\Rightarrow DB: \left\{x;\ \ x \in R; x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2};\ \ k \in Z\right\}$$

Symmetrie:

Axialsymmetrie zur y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$

$$\frac{4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)} = \frac{4\cdot\sin(-x)+5}{\cos^2(-x)}$$

Zentralsymmetrie zum Koordinatenursprung:

$$f(x) = -f(-x)$$

$$\frac{4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)} = -\frac{4\cdot\sin(-x)+5}{\cos^2(-x)}$$

mit $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

folgt: $\dfrac{4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)} \neq \dfrac{-4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)}$

folgt: $\dfrac{4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)} \neq \dfrac{-\left(-4\cdot\sin(x)\ \right)-5}{\cos^2(x)}$

$$\neq \frac{4\cdot\sin(x)-5}{\cos^2(x)}$$

b)

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

mit der x-Achse:

$4\cdot\sin(x)+5=0 \Rightarrow 4\cdot\sin(x)=-5 \Rightarrow \sin(x)=-\frac{5}{4}$ n.d. $\Rightarrow$ keine Schnittpunkte mit x-Achse

mit der y-Achse:

$$f(0) = \frac{4\cdot\sin(0)+5}{\cos^2(0)} = \frac{5}{1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_y\left(0\,|\,5\right)}$$

Extrema als Minima:

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{4\cdot\sin(x)+5}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{4\cdot\cos(x)\cdot\cos^2(x)-\left(4\cdot\sin(x)+5\right)\cdot 2\cdot\cos(x)\cdot\left(-\sin(x)\right)}{\cos^4(x)}$$

$$f'(x) = \frac{4\cdot\cos^2(x)+\left(4\cdot\sin(x)+5\right)\cdot 2\cdot\left(\sin(x)\right)}{\cos^3(x)}$$

$$f'(x) = \frac{4\cdot\cos^2(x)+8\sin^2(x)+10\sin(x)}{\cos^3(x)} = 2\cdot\frac{2\cdot\cos^2(x)+4\sin^2(x)+5\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$f'(x) = 2\cdot\frac{2\cdot\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)+2\sin^2(x)+5\sin(x)}{\cos^3(x)} = \underline{2\cdot\frac{2\sin^2(x)+5\sin(x)+2}{\cos^3(x)}}$$

2. Ableitung nicht notwendig, da laut Aufgabenstellung alle Extrema Minima sind!

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 = 0$$

$$\sin^2(x) + \frac{5}{2}\sin(x) + 1 = 0$$

$$\sin(x)_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\sin(x_{E_1}) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \sin(x_{E_2}) = -2 \quad \text{n.d.}$$

$$\underline{x_E = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \ k \in Z}$$

$$\text{im Grundintervall:} \quad x_1 = \frac{7\pi}{6} \ ; \quad x_2 = \frac{11\pi}{6}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\right) + 5}{\cos^4\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 2 \cdot \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\right) + 5}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^4}$$

$$= 2 \cdot \frac{-1 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{2} + \frac{3}{4} + 3\right) + 5}{\frac{9}{16}} = 2 \cdot \frac{-1 \cdot \left(\frac{11}{4}\right) + 5}{\frac{9}{16}}$$

$$= 2 \cdot \frac{-\frac{11}{4} + 5}{\frac{9}{16}} = 2 \cdot \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{16}} = 2 \cdot \frac{9 \cdot 16}{9 \cdot 4} = 2 \cdot 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

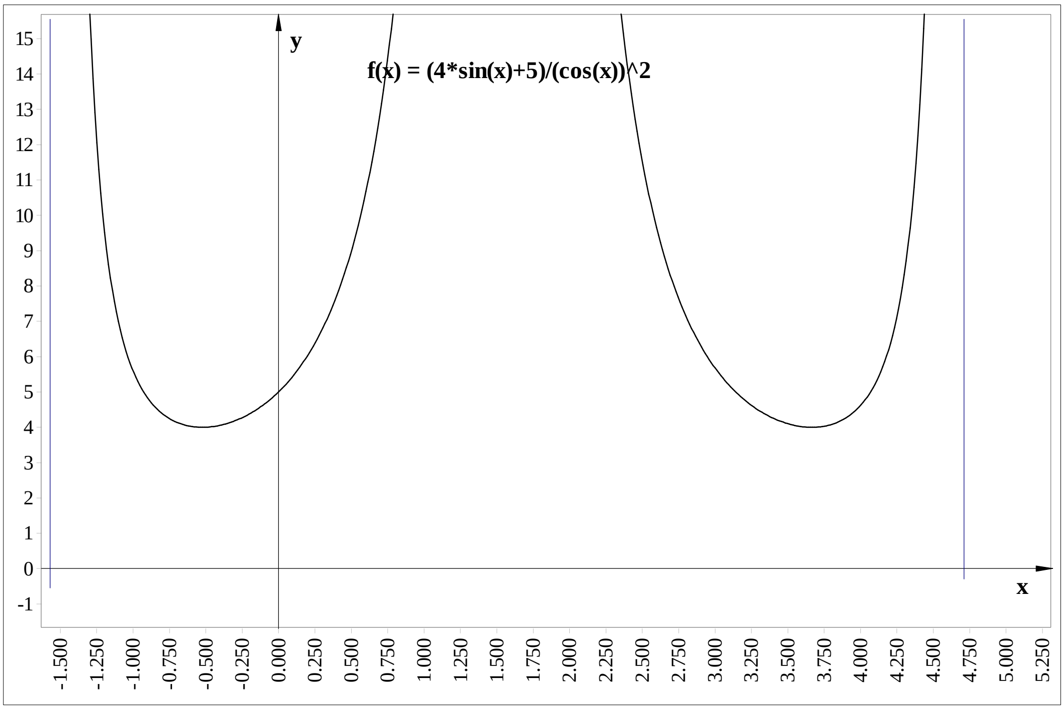
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-2+5}{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{3} = 4 \ \Rightarrow \ \underline{T\left(-\frac{\pi}{6} \mid 4\right)}$$

$$\text{im Grundintervall:} \quad T_1\left(\frac{7\pi}{6} \mid 4\right) \ ; \ T_1\left(\frac{11\pi}{6} \mid 4\right)$$

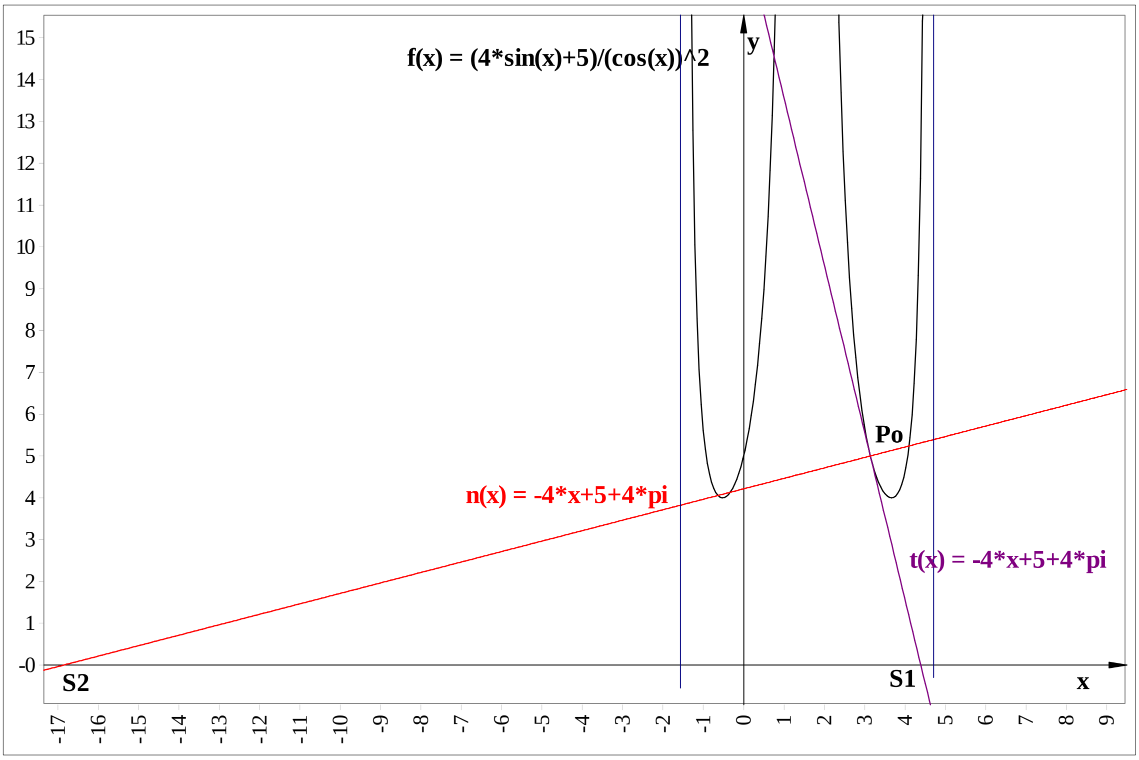
<u>Berechnung der Funktionswerte:</u>

x	-1	$\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
f (x)	$\approx 5{,}6$	$\frac{28}{3}$	5	$20 - 8\sqrt{3}$

Graph:



c) (grafische Darstellung nicht verlangt!)



Tangente:

$t(x) = mx + n$

$$f(\pi) = \frac{4 \cdot \sin(\pi) + 5}{\cos^2(\pi)} = \frac{4 \cdot 0 + 5}{1} = 5 \Rightarrow P_0(\pi \mid 5)$$

$$f'(\pi) = 2 \cdot \frac{2 \sin^2(\pi) + 5\sin(\pi) + 2}{\cos^3(\pi)} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2}{-1} = -4$$

$5 = -4 \cdot \pi + n \Rightarrow n = 5 + 4\pi$

$\Rightarrow \quad \underline{t(x) = -4x + 5 + 4\pi}$

Normale:

$n(x) = ax + b \qquad a = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$

$5 = \frac{1}{4} \cdot \pi + b \Rightarrow b = 5 - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad \underline{n(x) = \frac{1}{4}x + 5 - \frac{\pi}{4}}$

Schnittpunkte:

Tangente: $\quad -4x + 5 + 4\pi = 0$

$$4x = 5 + 4\pi$$

$$x = \frac{5}{4} + \pi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S_1\left(\frac{5}{4} + \pi \mid 0\right)}$$

Normale: $\quad \frac{1}{4}x + 5 - \frac{\pi}{4} = 0$

$$\frac{1}{4}x = -5 + \frac{\pi}{4}$$

$$x = -20 + \pi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S_2(\pi - 20 \mid 0)}$$

Innenwinkel:

$\angle(S_2P_0S_1) = 90°$ nach Vor., da Normale

$m_t = -4 = \tan(\angle(P_0S_1S_2)) \Rightarrow \underline{\underline{\angle(P_0S_1S_2) = 75{,}96°}}$

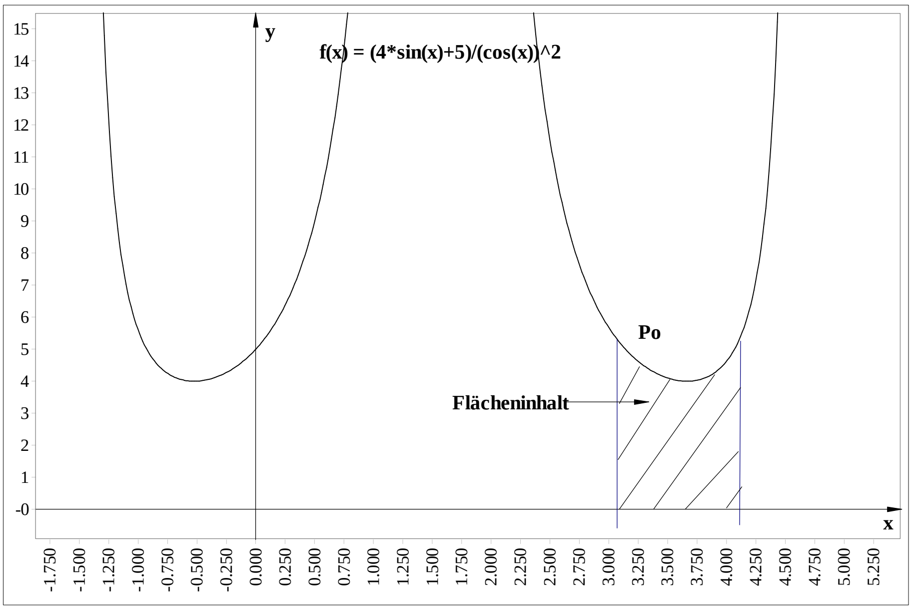
Innenwinkelsumme: $\Rightarrow \underline{\angle(S_1S_2P_0) = 14{,}04°}$

Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = \frac{1}{2} \cdot \left(|\pi - 20| + \frac{5}{4} + \pi\right) \cdot 5 = \frac{5}{2} \cdot \left(-\pi + 20 + \frac{5}{4} + \pi\right)$$

$$A = \frac{5}{2} \cdot \frac{85}{4} = \underline{\frac{425}{8}\,\text{FE}}$$

d) <u>Flächeninhalt:</u>



$$A = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{4\sin(x)+5}{\cos^2(x)}\,dx = 4\cdot\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx + 5\cdot\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

$$= 4\cdot\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx + 5\cdot\left[\tan(x)\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}}$$

Nebenrechnung:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx \qquad \text{mit} \quad v(x)=\cos(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{dv}{\sin(x)}$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx = -\int \frac{\sin(x)}{v^2\cdot\sin(x)}dv = -\int v^{-2}dv = -\left(-v^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos(x)}$$

$$A = \left[\frac{4}{\cos(x)} + 5\tan(x)\right]_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}$$

$$A = \frac{4}{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} + 5\cdot\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{4}{\cos(\pi)} - 5\cdot\tan(\pi)$$

$$A = \frac{4}{-\frac{1}{2}} + 5\cdot\sqrt{3} - \frac{4}{-1} - 5\cdot 0 = -8 + 5\cdot\sqrt{3} + 4 = \underline{5\cdot\sqrt{3} - 4\text{FE}} \approx 4{,}66\text{FE}$$

Aufgabe 3.2.

Gegen ist die Funktion f durch $f:\quad y = f(x) = 2\left(1 + \ln x\right), x \in R, x > 0$.

a) Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse im Punkt $P_0(\, x_0 \mid f(x_0))$.
Ermitteln Sie die Koordinaten von P_0.

b) Eine Gerade g schneidet den Graph der Funktion f in folgenden Punkten:
$P_1\left(\frac{2}{e-1} \mid f\left(\frac{2}{e-1}\right)\right)$ und $P_2\left(\frac{2e}{e-1} \mid f\left(\frac{2e}{e-1}\right)\right)$.
Ermitteln Sie den Anstieg der Geraden g.
Stellen Sie eine Gleichung der Tangente t auf, die Parallel zu dieser Geraden g verläuft.

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion f im Intervall $\frac{1}{e} \le x \le e$ um die x-Achse entsteht ein Körper, dessen Volumen die Maßzahl V besitzt.
Berechnen Sie die Maßzahl V des Volumens.

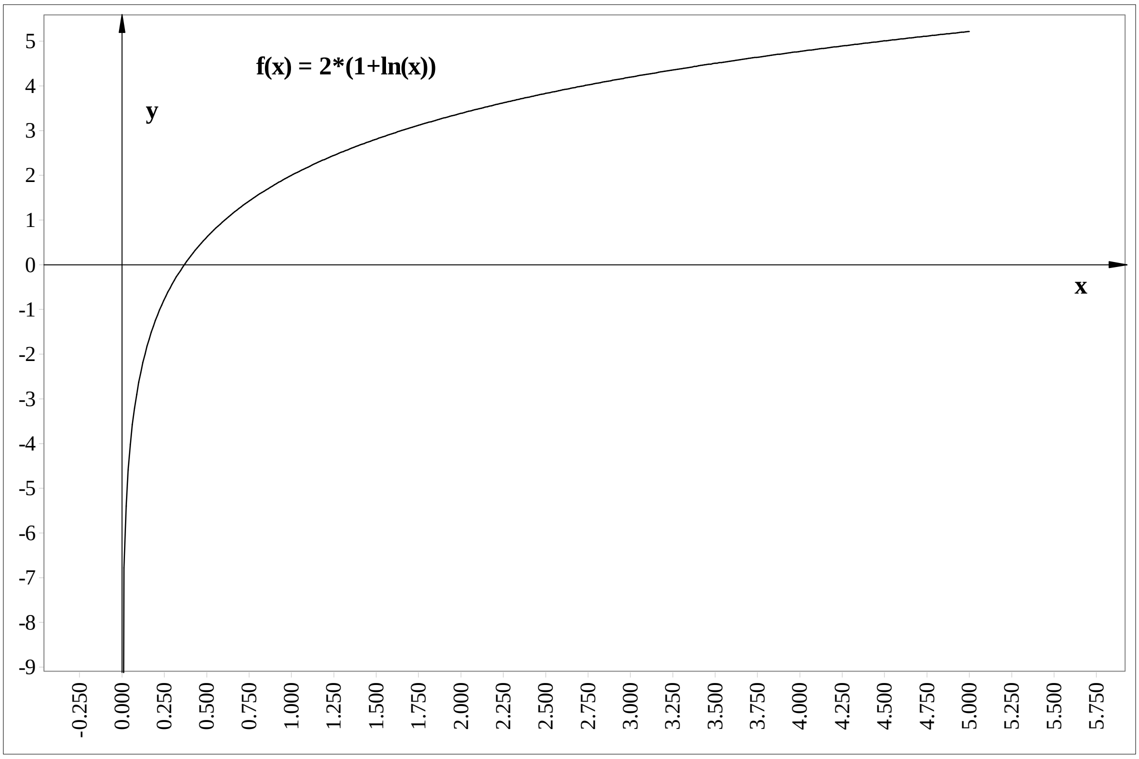
Lösung:

a)

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$2 \cdot \left(1 + \ln(x)\right) = 0 \Rightarrow 1 + \ln(x) = 0$$
$$\ln(x) = -1$$
$$e^{\ln(x)} = e^{-1}$$
$$x_0 = e^{-1} \qquad \Rightarrow \underline{P_0\left(e^{-1} \mid 0\right)}$$

Graph:



b)

$$f\left(x_1\right) = f\left(\frac{2}{e-1}\right) = 2 \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{2}{e-1}\right)\right); \quad f\left(x_2\right) = f\left(\frac{2e}{e-1}\right) = 2 \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{2e}{e-1}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_1\left(\frac{2}{e-1} \mid 2 \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{2}{e-1}\right)\right)\right); \quad P_2\left(\frac{2e}{e-1} \mid 2 \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{2e}{e-1}\right)\right)\right)$$

Anstieg von g:

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2\cdot\left(1+\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)\right)-2\cdot\left(1+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right)}{\frac{2e}{e-1}-\frac{2}{e-1}}$$

$$m=\frac{2+2\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-2-2\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)}{\frac{2e-2}{e-1}}=\frac{2\cdot\left(\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right)}{\frac{2\cdot(e-1)}{e-1}}$$

$$m=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{\frac{2e}{e+1}}{\frac{2}{e+1}}\right)=\ln\left(\frac{2e\cdot(e+1)}{2\cdot(e+1)}\right)=\ln(e)=\underline{1}$$

Tangentengleichung: (Parallele zur Geraden g)

$$f(x)=2\cdot(1+\ln(x))$$

$$f'(x)=\frac{2}{x}$$

$$f'(x)=m=1=\frac{2}{x}\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow\quad \text{Berührungspunkt:}\quad f(2)=2\cdot(1+\ln(2))=2+2\cdot\ln(2)=2+\ln(2)\cdot\ln(2)=2+(\ln(2))^2$$

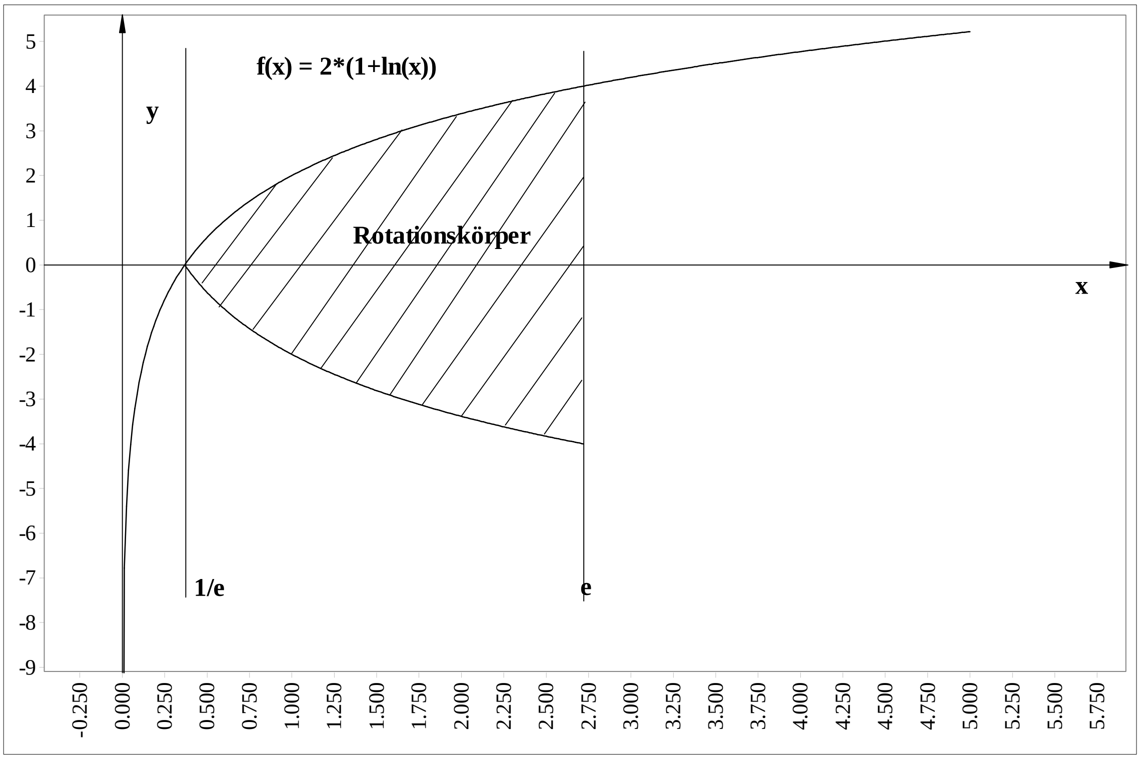
$$=2+\ln(4)$$

$$\Rightarrow\quad B(2\,|\,2+\ln(4))$$

$$t(x)=m\cdot x+n$$

$$2+\ln(4)=1\cdot x+n\Rightarrow n=\ln(4)\Rightarrow\quad \underline{t(x)=x+\ln(4)}\qquad \ln(4)\approx 1{,}386$$

c) Rotationsvolumen



$$V = \pi \cdot \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(2 \cdot (1 + \ln(x))\right)^2 dx$$

$$V = 4\pi \cdot \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1 + 2\ln(x) + (\ln(x))^2\right) dx$$

$$V = 4\pi \cdot \left[\int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\ dx + 2 \cdot \int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln(x)\ dx + \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln(x))^2\ dx \right]$$

Nebenrechnung 1:

$$\int \ln(x)\ dx = \int (1 \cdot \ln(x))\ \ dx =$$

$$u(x) = x \qquad v(x) = \ln(x)$$

$$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int \left(x \cdot \frac{1}{x} \right)\ dx \cdot \ln(x) - \int 1\ \ dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x$$

Nebenrechnung 2:

$$\int \left(1\cdot\left(\ln(x)\right)^2\right)\ dx$$

$$u(x) = x \qquad v(x) = \left(\ln(x)\right)^2$$

$$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = \frac{2}{x}\cdot\ln(x)$$

$$= x\cdot\left(\ln(x)\right)^2 - \int\left(x\cdot\frac{2}{x}\cdot\ln(x)\right)\ dx$$

$$= x\cdot\left(\ln(x)\right)^2 - 2\cdot\int\ln(x)\ \ dx$$

$$= x\cdot\left(\ln(x)\right)^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x$$

$$V = 4\pi\cdot\left[x + 2x\cdot\ln(x) - 2x + x\cdot\left(\ln(x)\right)^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$V = 4\pi\cdot\left[x + x\cdot\left(\ln(x)\right)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = 4\pi\cdot\left[x\cdot\left(1+\left(\ln(x)\right)^2\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$V = 4\pi\cdot\left[e\cdot\left(1+\left(\ln(e)\right)^2\right) - \frac{1}{e}\cdot\left(1+\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2\right)\right]$$

$$V = 4\pi\cdot\left[e\cdot(1+1) - \frac{1}{e}\cdot\left(1+\left(\ln(1)-\ln(e)\right)^2\right)\right]$$

$$V = 4\pi\cdot\left[2e - \frac{1}{e}\cdot\left(1+\left(0-1\right)^2\right)\right] = 4\pi\cdot\left[2e - \frac{1}{e}\cdot(1+1)\right]$$

$$V = 4\pi\cdot\left(2e - \frac{2}{e}\right) = \underline{8\pi\cdot\left(e - e^{-1}\right)} = 8\pi\cdot\left(\frac{e^2-1}{e}\right) \approx 59{,}07\,\text{VE}$$