Abitur - Grundkurs Mathematik
(Grundlegendes Anforderungsniveau)

Sachsen-Anhalt 2013

Pflichtaufgabe G1: Analysis

Pflichtaufgabe G1

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = e\,x + 1 - e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph sei G.

a) Untersuchen Sie den Graphen G auf lokale Extrempunkte sowie auf Wendepunkte und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte sowie die Art der lokalen Extrempunkte an.

Weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung y = ex + 1 Asymptote des Graphen G für $x \to -\infty$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $x_1 = 0$ Nullstelle der Funktion f ist und begründen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f im Intervall [1; 2] eine weitere Nullstelle x2 hat.

Berechnen Sie diese Nullstelle x_2 mithilfe des NEWTON-Verfahrens auf Hundertstel genau.

Begründen Sie, dass die Funktion f außer x_1 und x_2 keine weiteren Nullstellen besitzt.

Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall [–2; 2,5] in ein kartesisches Koordinatensystem.

c) Der Graph G und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

d) Erklären Sie durch Betrachtung geometrischer Körper, dass

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\left[f(x)\right]^2 dx < \pi\cdot\left[f(1)\right]^2\cdot\left(x_2 - x_1\right)$$

gilt, wobei x_1 und x_2 die im Aufgabenteil b) betrachteten Nullstellen sind.

Lösung:

a) Extrempunkt:

$$f(x) = e \cdot x + 1 - e^x$$
$$f'(x) = e - e^x$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$e - e^x = 0$$
$$e^x = e \quad |\ln$$
$$x_E = 1$$

$$f''(x) = -e^x$$
$$f''(1) = -e < 0 \Rightarrow x_E = 1 \text{ ist Extremstelle}$$
$$f(1) = e + 1 - e = 1 \Rightarrow \underline{H(1|1)}$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = -e^x = 0$$
$$e^x \neq 0 \Rightarrow \text{ kein Wendepunkt}$$

Asymptoten nachweisen:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(e \cdot x + 1 - e^x - e \cdot x - 1\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(-e^x\right) = -e^{-\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} = 0 \quad \text{(Nullfolge)}$$

$$\Rightarrow \quad a(x) = y = e \cdot x + 1 \text{ Asymptote (lineare Fkt)}$$

b)

Zeigen der Nullstelle:

$$f(0) = e \cdot 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Zwischenwertsatz: weitere Nullstelle im Intervall $[1;2]$

(1) $f(x)$ in $[1;2]$ stetig

(2) $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) \approx -0,95 \end{array}\right\} f(1) \neq f(2)$

Newton-Verfahren:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{Startwert: } x_1 = 2$$

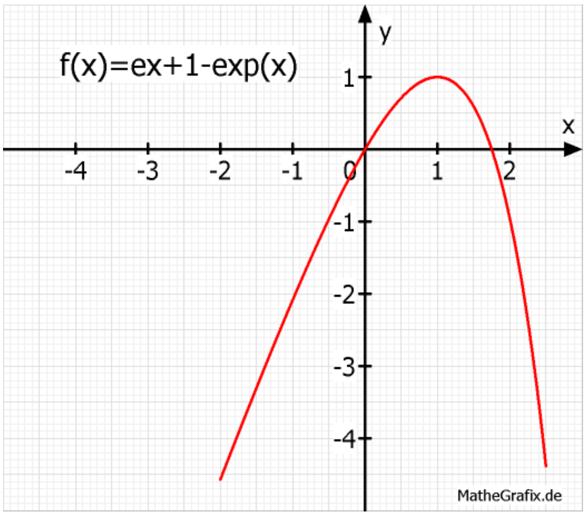
$$x_2 = 2 - \frac{2 \cdot e + 1 - e^2}{e - e^2} \qquad \approx 1,796$$
$$\approx 1,753$$
$$\approx 1,750$$

$$\Rightarrow \underline{x_2 \approx 1,75}$$

Begründung für keine weiteren Nullstellen:

- f ist stetig und differenzierbar
- nur ein Hochpunkt und zwei Nullstellen
- keine Wendepunkte $\Rightarrow$ nur zwei Nullstellen

Graph im Intervall $[-2; 2,5]$:



c) Flächenberechnung:

$$A = \int_0^{1,75} \left(e \cdot x + 1 - e^{-x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot e \cdot x^2 + x - e^x\right]_0^{1,75}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e \cdot 1,75^2 + 1,75 - e^{1,75} - (-1) = \underline{1,16 \text{ FE}}$$

d) Erklärung mit geometrischen Körpern:

$$\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx \qquad < \qquad \pi \cdot \left[f(1)^2 \cdot (x_2 - x_1)\right]$$

Rotationskörper Zylinder der Höhe $(x_2 - x_1)$

um x – Achse und des Grundkreisradiusses $f(1)$

Zylinder schließt den Flächeninhalt oberhalb der Kurve mit ein.

$\Rightarrow V_{Rotation} < V_{Zylinder}$