# Abitur - Leistungskurs Mathematik

# Sachsen-Anhalt 1999

## Gebiet L2 – Analytische Geometrie

Aufgabe 2.1.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1 \mid 2 \mid 3)$, $B(3 \mid 4 \mid 4)$; $C(-1 \mid 3 \mid 5)$ und $D(3 \mid 6 \mid 9)$ sowie die Ebene $8x_1 - 19x_2 + 13x_3 - 18 = 0$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene $E_2$.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene $E_2$.

$$\left[\text{Ergebnis zur Kontrolle: z.B. } x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0\right]$$

Weisen Sie nach, dass der Punkt D nicht in der Ebene $E_2$ liegt.
Die Fläche des Dreiecks ABC ist die Grundfläche eines Prismas ABCDEF. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte E und F für den Fall, dass $\overline{AD}$ eine Seitenkante dieses Prismas ist.
Zeigen Sie, dass das Prisma ABCDEF ein schiefes Prisma ist.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Prismas.

b) Zeigen Sie, dass die Kante $\overline{EF}$ des Prismas ABCDEF (siehe Aufgabe a) in der Ebene $E_1$ liegt.
Die Seitenkante $\overline{AD}$ des Prismas wird von der Ebene $E_1$ im Punkt G geschnitten. Berechnen Sie die Koordinaten es Punktes G.
Bei dem Schnitt des Prismas durch die Ebene $E_1$ entstehen zwei Körper. Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumina dieser Körper.

c) Die Fläche des Dreiecks ABC soll nun Grundfläche eines geraden Prismas ABCPQR sein, das Volumengleich mit dem schiefen Prisma ABCDEF (siehe Aufgabe a) ist. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte P,Q und R für ein solches Prisma.

Lösung:

a)

Mittelpunkt und Radius der Kugel:

$$K: \quad x_1^2 + 2x_1 \quad + x_2^2 - 4x_2 \quad + x_3^2 - 6x_3 \quad = -5$$
$$x_1^2 + 2x_1 + 1 - 1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 - 4 + x_3^2 - 6x_3 + 9 - 9 = -5$$
$$(x_1+1)^2 - 1 \quad + (x_2-2)^2 - 4 \quad + (x_3-3)^2 - 9 \quad = -5$$
$$(x_1+1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 = 9$$
$$\Rightarrow \quad \underline{M(-1 \mid 2 \mid 3) \text{ und } r = 3}$$

Länge von $\overline{PQ}$:

Durchstoßpunkte von g durch K $\Rightarrow$ g in K einsetzen

$$(6-5t+1)^2+(4-t-2)^2+(-1+2t-3)^2=9$$
$$(7-5t)^2+(2-t)^2+(-4+2t)^2=9$$
$$49-70t+25t^2+4-4t+t^2+16-16t+4t^2=9$$
$$30t^2-90t+60=0$$
$$t^2-3t+2=0$$
$$t_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}$$
$$t_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow t_1=2\ ;\quad t_2=1$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \underline{Q(-4\mid 2\mid 3)}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \underline{P(1\mid 3\mid 1)}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{25+1+4}=\underline{\sqrt{30}}$$

b)

Koordinatengleichung der Tangentialebene $E_2$:

$$(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{p}-\vec{m})=r^2$$

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right]\bullet\left[\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right]=9\Rightarrow\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=9\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1+1\\x_2-2\\x_3-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=9$$

$$2\cdot(x_1+1)+x_2-2-2\cdot(x_3-3)=9$$
$$2x_1+2+x_2-2-2x_3+6=9$$
$$\underline{2x_1+x_2-2x_3=3}\quad \text{für } E_2$$

Berührungspunkt R der Ebene $E_3 : \neq$

$E_3 \parallel E_2 \Rightarrow E_3$ liegt auf der anderen "Seite" der Kugel

$\Rightarrow$ R hat von P den Abstand $2 \cdot r$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \underline{R(-3 \mid 1 \mid 5)}$$

Gleichung der Ebene $E_3$:

wegen $E_3 \parallel E_2$ haben beide gleichen Normalenvektor

$$\Rightarrow \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow E_3 : \underline{2x_1 + x_2 - 2x_3 = -15}$$

Abstand d der Ebenen $E_2$ und $E_1$:

da $E_1 \parallel E_2$ und P liegt in $E_2 \Rightarrow$ Abstand P von $E_1$

$$d(P, E_1) = \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1{,}5}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2 \cdot 1 + 3 - 2 \cdot 1 + 1{,}5}{\sqrt{9}} = \frac{5{,}5}{3} = \underline{1{,}5}$$

Nachweis, dass $E_1$ K schneidet:

$d(M, E_1) = 1{,}5$, da $d(P, E_1) = 1{,}5$

$\Rightarrow$ Abstand kleiner als Radius $\Rightarrow$ $\underline{E_1 \text{ schneidet } K}$

c)

Gleichung der Geraden h:

Alle Mittelpunkte der Kugel $K_a$ erfüllen die Geradengleichung, a als Parameter

$$\text{aus} \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Abstand der Geraden $x_1$ – Achse und h:

Abstände sind immer minimal, da sie senkrecht gemessen werden

Entsprechend Skizze (Aufgabenblatt): $\overrightarrow{SM_a} \perp x_1$ – Achse und $\overrightarrow{SM_a} \perp h$

$$\overrightarrow{SM_a} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{SM_a} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad S\,(\, x_S \mid 0 \mid 0 \,)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - a + x_s \\ a \\ 1 + a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 - a + x_s \\ a \\ 1 + a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\mathrm{I}: \quad 1 - a + x_s = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow x_s = a - 1$

$\underline{\mathrm{II}: \quad 1 - a + x_s + a + 1 + a = a + x_s + 2 = 0}$

$\mathrm{I}' \quad \text{in} \quad \mathrm{II}: \quad a + a - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{2}} \qquad x_s$ wird nicht benötigt

$$\overrightarrow{OM_a} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0,5 \\ -0,5 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{M_{-0,5}\left(1,5 \mid -0,5 \mid 0,5\right)}$$

Aufgabe 2.2.

In einem $x_1x_2$-Koordinatensystem sind die Punkte A(2 | 6), B(-1  -3) und C(6 | -2) gegeben.

a) Die Punkte A und C bestimmen die Gerade g.
Ermitteln Sie die Normalform der Gleichung der Geraden g und den Betrag des Abstandes des Punktes B von der Geraden g.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und die Maßzahl des Radius des Umkreises k des Dreiecks ABC.

$$\left[\text{Teilergebnis zur Kontrolle: } M(2|1)\right]$$

b) Das bisher benutzte Koordinatensystem wird zu einem räumlichen kartesischen $x_1x_2x_3$-Koordinatensystem erweitert.
In diesem Koordinatensystem ist die Kugel $K_1$ durch $K_1:\ (x_1-1)^2+(x_2+1)^2+(x_3-2)^2=16$ gegeben.
Geben Sie eine Gleichung des Geraden g (siehe Aufgabe a) in diesem Koordinatensystem an.
Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel $K_1$ nicht durchstößt.
Der Kreis k (siehe Aufgabe a) sei ein Kreis einer Kugel $K_2$. Der Kreis und die Kugel haben denselben Mittelpunkt. Zeigen Sie, dass die Kugeln $K_1$ und $K_2$ einander schneiden.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene, in der der Schnittkreis der Kugeln $K_1$ und $K_2$ liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Schnittkreises der Kugeln $K_1$ und $K_2$.

Lösung:

a)

$\underline{\text{Nachweis, daß } g_1 \text{ und } g_2 \text{ echt parallel:}}$

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\10\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\qquad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

(1) gleiche Richtungsvektoren $\Rightarrow$ Parallelität

(2) Untersuchung, ob z.B. $A\in g_1$

$$\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 5=7+2\ s\Rightarrow s=-1\\ \quad 5=10+5\ s\Rightarrow s=-1\\ \quad 4=0\ +0\ s\Rightarrow s\ \text{ n.d.}\end{array}\right\}\Rightarrow A\notin g_1\Rightarrow \underline{g_1 \text{ und } g_2 \text{ echt parallel}}$$

$\underline{\text{Nachweis, dass } g_1 \text{ in } x_1-x_2-\text{Ebene liegt:}}$

$\underline{x_3-\text{Koordinate von } g_1=0}$

oder z.B.:

$$\begin{pmatrix}7\\10\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}7=\lambda_1\\10=\mu_1\end{array}\Rightarrow \text{Stützvektor von } g_1\in E_{x_1x_2}$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}=\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}2=\lambda_2\\5=\mu_2\end{array}\Rightarrow \text{Richtungsvektor von } g_1\in E_{x_1x_2}$$

b)

<u>Ebenengleichung $(g_1, g_2)$:</u>

Punkt $P(7|10|0)$ liegt in der Ebene

Richtungsvektor der Geraden $g_1$ bildet einen Spannvektor der Ebene

zweiter Spannvektor z.B. $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad E_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{x} \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[ \ \overrightarrow{\quad x \quad} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform: $\underline{5x_1 - 2x_2 = 15}$

Orthogonalität beider Ebenen:

$\Rightarrow$ Skalarprodukt der Richtungsvektoren muß 0 werden

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = \underline{0 \Rightarrow E_1 \perp E_{x_1 x_2}}$$

c)

<u>Nachweis der Gleichschenkligkeit:</u>

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{4 + 25} = \underline{\sqrt{29}} \approx 5,385$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AS} = \sqrt{2,9^2 + 4} = \underline{\sqrt{12,41}} \approx 3,52$$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2,1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BS} = \sqrt{4 + 2,1^2 + 4} = \underline{\sqrt{12,41}} \approx 3,52$$

$$\Rightarrow \underline{\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS}} \Rightarrow \quad \Delta ABS \text{ ist gleichschenklig}$$

Flächeninhalt:

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\ \mathrm{x}\ \overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\mathrm{x}\begin{pmatrix}0\\2,9\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}5\cdot 2-0\cdot 2,9\\0\cdot 0-2\cdot 2\\2\cdot 2,9-5\cdot 0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}10\\-4\\5,8\end{pmatrix}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10^2+4^2+5,8^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{149,64}=6,11637=\underline{6,12}$$

wer anders rechnet: $h\approx 2,274$

oder

Heronische Formel - Tafelwerk:

$$A=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

$$\text{mit}\quad s=\frac{u}{2}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{12,41}+\sqrt{29}}{2}=\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}$$

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)\cdot\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}-\sqrt{12,41}\right)\cdot\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}-\sqrt{12,41}\right)\cdot\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}-\sqrt{29}\right)}$$

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)\cdot\left(\sqrt{12,41}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)}$$

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{12,41}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)\cdot\frac{29}{4}\cdot\left(\sqrt{12,41}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\right)}$$

$$A=\sqrt{\left(12,41-\frac{29}{4}\right)\cdot\frac{29}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29\cdot\left(12,41-\frac{29}{4}\right)}=\underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{149,64}}\approx 6,12$$

d)

Bestimmung der Koordinaten von C und D:

C und D liegen auf der Geraden $g_1$ und da $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \in E_{x_1x_2}$

$\Rightarrow$ die Punkte C und D ergeben sich als senkrechte Projektion der Punkte A und B auf die $x_1x_2$-Ebene

$\Rightarrow$ Normalenvektor der $x_1x_2$-Ebene $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$

$\Rightarrow g_{\overline{AC}}:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $g_1:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}7\\10\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$ schneiden sich

$\Rightarrow \quad 5 = 7 + 2t \quad \Rightarrow t = -1$

$5 = 10 + 5t \quad \Rightarrow t = -1$

$4 + r = 0 \quad \Rightarrow r = -4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \underline{C(5 \mid 5 \mid 0)}$$

da $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 5 \\ d_2 - 5 \\ d_3 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = d_1 - 5 \Rightarrow d_1 = 7 \\ 5 = d_2 - 5 \Rightarrow d_2 = 10 \\ 0 = d_3 \end{array} \Rightarrow \quad \underline{D(7 \mid 10 \mid 0)}$$

Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$A_G = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{16} = \underline{4 \cdot \sqrt{29}} \approx 21{,}54$$

$$h = d(S, E_1) = \frac{5 \cdot 5 - 2 \cdot 7{,}9 - 15}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{5{,}8}{\underline{\sqrt{29}}} = \frac{5{,}8}{29} \cdot \sqrt{29} = \underline{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{29}} \approx 1{,}077$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5{,}8}{\sqrt{29}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{58}{10} = \underline{\frac{116}{15}} \approx 7{,}73$$

Koordinaten von $S_1$ und $S_2$:

da gerade Pyramiden, liegen die Spitzen $\perp$ zum Mitelpunkt der Grundfläche

$\Rightarrow$ Mittelpunkt der Grundfläche:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M(6 \mid 7{,}5 \mid 2)$$

Normalenvektor der Grundfläche: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da die Grundfläche der Pyramide und ihr Volumen gleich bleiben, entspricht der Abstand $\overline{MS_1} = \overline{MS_2}$ der Höhe der Pyramide.

$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h \Rightarrow h = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{29}$ (nach Volumenberechnung)

$\Rightarrow$ der Punkt $S_1$ ergibt sich aus dem Dreieck

$$\frac{1}{5} \cdot \sqrt{29} = k \cdot \left|\vec{n}\right| \Rightarrow k = \frac{\sqrt{29}}{5 \cdot \sqrt{29}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MS_1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MS_2} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7{,}1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7{,}9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{S_1(7 \mid 7{,}1 \mid 2)} \qquad \underline{S_2(5 \mid 7{,}9 \mid 2)}$$