Abitur - Leistungskurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 1999

Gebiet L1 - Analysis

Aufgabe 1.1.

Die Funktionenschar f_a sei gegeben durch $y = fa(x) = (x + a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in D_{f_a}$, $a \in R$, $a > 0$.

Die Graphen der Funktionen der Schar f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) Ermitteln Sieden größtmöglichen Definitionsbereich D_{f_a} und berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar f_a.
Die Graphen G_a besitzen jeweils genau einen Hochpunkt, der der einzige lokale Extrempunkt ist. Ermitteln Sie die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen G_a, beschreiben Sie die Lage (Ortskurve) dieser Punkte im Koordinatensystem durch eine Gleichung und geben Sie deren Gültigkeitsbereich an.
Der Graph G_2 besitzt genau einen Wendepunkt $W(x_w \mid f(x_w))$ mit $x_w = 1 - \sqrt{3}$.
Ermitteln Sie den maximalen Anstieg des Graphen G_2.
Zeigen Sie, dass gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_2'(x) = 0$

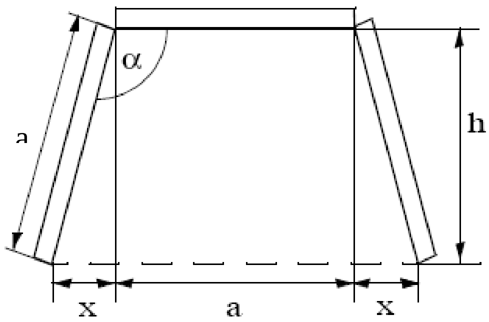
(Hinweis zu möglichen Termumformungen: $\frac{Z}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{Z \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4 - x^2}$)

Zeichnen Sie den Graphen G_2 im Definitionsbereich D_a.

b) An den Graphen G_2 sei im Punkt $P(0 \mid f_2(0))$ die Tangente gelegt. Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf und zeigen Sie, dass diese Tangente und der Graph G_2 noch genau einen weiteren gemeinsamen Punkt Q besitzen.
Der Koordinatenursprung, der Punkt P und der Punkt Q seien die Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Dreiecks $A = f_2(0)$ ist.

c) Durch Rotation jedes Graphen G_a für $x \geq 0$ um die x-Achse entsteht jeweils ein Rotationskörper. Ermitteln Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers.

d) Drei Betonteile mit der Breite a sollen, wie in nebenstehender Skizze dargestellt, zu einem Kabelschacht mit maximalem Querschnitt montiert werden.
Zeigen Sie, dass zur Extremwertberechnung die Funktionenschar f_a als Ausgangsfunktion (Zielfunktion) verwendet werden kann.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels α für den Fall, dass der Querschnitt maximal ist.



Lösung:

a)

Ermitteln des Definitionsbereiches:

$a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow \quad DB: \quad \underline{-a \leq x \leq a;\ x \in R}$

Nullstellen:

$(x+a)\cdot\sqrt{a^2-x^2} = 0$

$\Rightarrow \quad (x+a) = 0 \qquad \vee \qquad \sqrt{a^2-x^2} = 0$

$x_{0_1} = -a \qquad\qquad x^2 = a^2$

$\underline{x_{0_1} = -a \qquad\qquad x_{0_2} = a}$

Koordinaten der Hochpunkte:

$f_a(x) = (x+a)\cdot\sqrt{a^2-x^2} = (x+a)\cdot\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

erste Ableitung:

$f_a{}'(x) = \left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + (x+a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} - (x+a)\cdot x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-x^2-x^2-ax}{\sqrt{a^2-x^2}} = \underline{\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}$$

oder: $\quad f_a{}'(x) = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2+ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(Dann muß Vereinfachung bei x_E durchgeführt werden.)

notwendige Bed.:

$f_a{}'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \qquad \wedge \qquad \sqrt{a^2-x^2} \neq 0$

$$x^2 + \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$x_{E_{1,2}} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{2}} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{16}} = -\frac{a}{4} \pm \frac{3}{4}a$$

$$x_{E_1} = \frac{a}{2} \quad ; \quad x_{E_2} = -a$$

da laut Aufgabenstellung nur 1 HP existiert, muß untersucht werden,
welche Extremstelle zutreffend ist!

z.B.:

da die Funktion $f^{(n)}{}_a(x)$ für $x = -a$ und $k \in N$

$$f^{(n)}{}_a(-a) = \frac{\text{beliebiger Term}}{\left(a^2-a^2\right)^{\frac{n+k}{2}}} = \frac{\text{beliebiger Term}}{0} \Rightarrow \text{n.d. ergibt, ist } x_{E_2} \notin L$$

oder: da x_{E_1} Max. $\Rightarrow x_{E_2}$ müßte Min. sein $\Rightarrow$ bei $-a$ muß ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte vorliegen, hier nicht möglich, da -a Rand des Definitionsbereiches darstellt.

$\Rightarrow x_E = \frac{a}{2}$ ist einzige Extremstelle

Nachweis hinreichender Bedingung laut Aufgabenstellung nicht notwendig!

oder über 2. Ableitung:

$$f_a''(x)=\frac{(-4x-a)\cdot\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{-2x\cdot\left(-2x^2-ax+a^2\right)}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\dfrac{(-4x-a)\cdot\left(a^2-x^2\right)+x\cdot\left(-2x^2-ax+a^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{-4a^2x-a^3+4x^3+ax^2-2x^3-ax^2+a^2x}{\left(a^2-x^2\right)\ \cdot\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2x^3-3a^2x-a^3}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$$

$\Rightarrow f_a''(-a)$ n.d.

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}+a\right)\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{3}{2}a\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$$

$\Rightarrow\ \underline{H\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2\right)}$

Gleichung der Ortskurve:

$x=\frac{a}{2}\Rightarrow a=2x$

$y=\frac{3}{4}\sqrt{3}\quad a^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot 4x^2=\underline{3\cdot\sqrt{3}\,x^2}$

Gültigkeitsbereich: $\underline{x>0}$; $x\in R$ da $a>0$

(Begründung nicht verlangt!)

maximaler Anstieg von $f_2(x)$:

$$f_2'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f_2'\left(1-\sqrt{3}\right)=\frac{-2\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)+4}{\sqrt{4-\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{-2\cdot\left(1-2\cdot\sqrt{3}+3\right)-2+2\cdot\sqrt{3}+4}{\sqrt{4-1+2\cdot\sqrt{3}-3}}$$

$$=\frac{-8+4\cdot\sqrt{3}-2+2\cdot\sqrt{3}+4}{\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}=\frac{6\cdot\sqrt{3}-6}{\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}=\underline{\frac{6\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}\approx 2{,}36}$$

Nachweis, daß der Anstieg in $x_W=1-\sqrt{3}$ maximal ist:

z.B.: Maximum des Anstieges heißt $f''(x)=0\Rightarrow$ das ist notwendige Bedingung für WP

oder: Nachweis: $f_2'''\left(1-\sqrt{3}\right)<0$

also zweite und dritte Ableitung bilden.

[Ableitungen müssen nur soweit vereinfacht werden, um die Entscheidung sicher treffen zu können.]

Hinweis: Wenn $f_a''(x)$ bereits oben gebildet, dann wird folgender Weg verkürzt!

$$f_2''(x)=\frac{(-4x-2)\cdot\sqrt{4-x^2}-\left(-2x^2-2x+4\right)\cdot\frac{(-2x)}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

$$=\frac{\frac{(-4x-2)\cdot\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+\left(-2x^2-2x+4\right)\cdot x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\frac{(-4x-2)\cdot\left(4-x^2\right)-2x^3-2x^2+4x}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$$

$$=\frac{-16x-8+4x^3+2x^2-2x^3-2x^2+4x}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}=\frac{2x^3-12x-8}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$$

$$f_2'''(x)=\frac{\left(6^2-12\right)\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}-\left(2x^3-12x-8\right)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^3}$$

$$=\frac{\left(6x^2-12\right)\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+\left(6x^4-36x^2-24x\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}{\left(4-x^2\right)^3}$$

$$=\frac{\left(6x^2-12\right)\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+\left(6x^4-36x^2-24x\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}{\left(4-x^2\right)^3}$$

$$=\frac{\left(6x^2-12\right)\cdot\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)}+\left(6x^4-36x^2-24x\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{\left(4-x^2\right)}\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}$$

$$=\frac{\left(6x^2-12\right)\cdot\left(4-x^2\right)+\left(6x^4-36x^2-24x\right)}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}$$

$$=\frac{24x^2-48-6x^4+12x^2+6x^4-36x^2-24x}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}=\frac{-24x-48}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}$$

$$f_2'''\left(1-\sqrt{3}\right)=\frac{-24+24\cdot\sqrt{3}-48}{\sqrt{\left(4-\left(1-\sqrt{3}\right)^2\right)^5}}=\frac{24\cdot\sqrt{3}-72}{\sqrt{\left(4-4+2\cdot\sqrt{3}\right)^5}}=\frac{24\cdot\sqrt{3}-72}{\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^5}}\approx-1,3625$$

$\Rightarrow$ da $24\cdot\sqrt{3}<72$ und Nenner >0 ist $f_2'''\left(1-\sqrt{3}\right)<0$

An der Wendestelle besitzt die Funktion den maximalen Anstieg!

Nachweis des Grenzwertes:

$$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4 - x^2}} \xrightarrow{\text{mit Hinweis in Aufgabe}} \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{\left(-2x^2 - 2x + 4\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4 - x^2}$$

$$= \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{(-2x + 2) \cdot (x + 2) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{(2 + x) \cdot (2 - x)} = \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{(-2x + 2) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{(2 - x)}$$

$$= \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{x \cdot \left(-2 + \frac{2}{x}\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x \cdot \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{\left(-2 + \frac{2}{x}\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{\left(\frac{2}{x} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(-2 + \frac{2}{-2}\right) \cdot \sqrt{4 - 4^2}}{\left(\frac{2}{-2} - 1\right)} = \frac{(-2 - 1) \cdot 0}{-2} = \frac{0}{-2} = \underline{0}$$

oder:

$$\lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4 - x^2}} \xrightarrow{\text{mit Hinweis in Aufgabe}} \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{\left(-2x^2 - 2x + 4\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4 - x^2}$$

$$= \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{x^2 \cdot \left(-2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \lim_{\text{r.: } x \to -2} \frac{\left(-2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(-2 - \frac{2}{-2} + \frac{4}{4}\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}}{\left(\frac{4}{4} - 1\right)} \Rightarrow \text{ führt zu einem nicht definierten Ausdruck}$$

$\Rightarrow$ mit Erstzfolge: $\quad x_n = -2 + \frac{1}{n}$

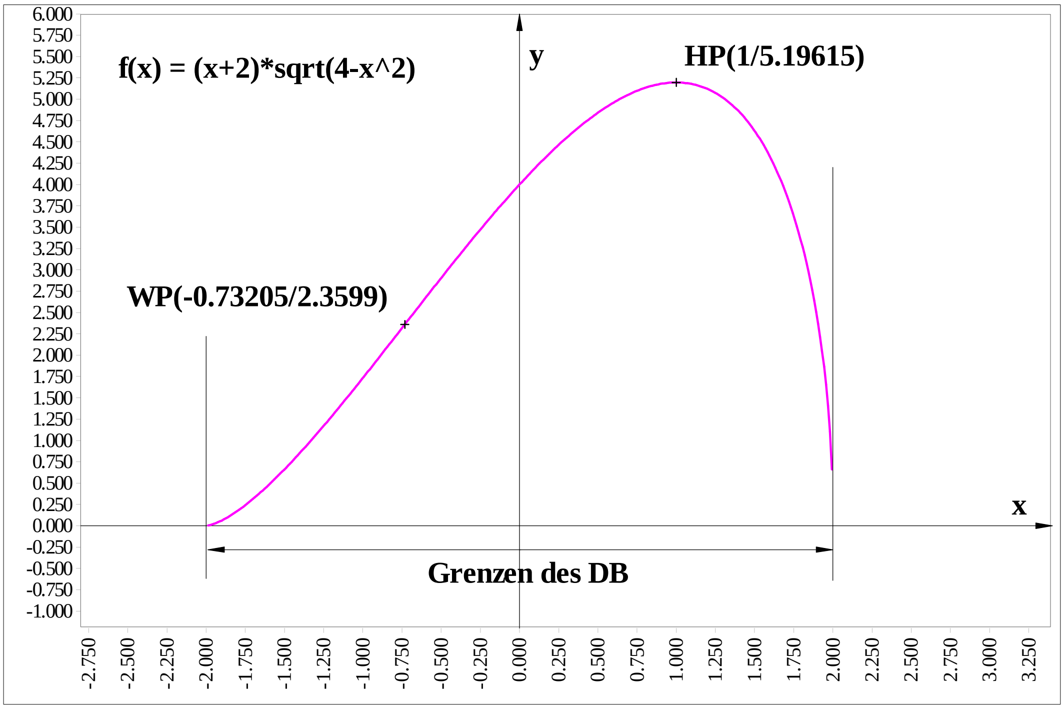
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\left(-2 \cdot \left(-2 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \left(-2 + \frac{1}{n}\right) + 4\right) \cdot \sqrt{4 - \left(-2 + \frac{1}{n}\right)^2}}{4 - \left(-2 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(-2 \cdot \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 4 - \frac{2}{n} + 4\right) \cdot \sqrt{4 - \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}{4 - \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-8+\frac{8}{n}-\frac{2}{n^2}+4-\frac{2}{n}+4\right)\cdot\sqrt{4-4+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}{4-4+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(6-\frac{2}{n}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}\cdot\left(4-\frac{1}{n}\right)} = \frac{(-\infty-6+0)}{4-0} = \frac{0}{4} = \underline{0}$$

Graph:



b)

$\underline{\text{Tangentengleichung an } f_2(x) \text{ in } P\left(0 \mid f_2(0)\right):}$

$f_2(x) = (x+2)\cdot\sqrt{4-x^2}$

$f_2(0) = 2\cdot\sqrt{4-x^2} = 4 \Rightarrow \underline{P(0|4)}$

$f_2{}'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}$

$f_2{}'(0) = m = \dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2$

Tangente: $\quad t(x) = mx+n$

mit $\quad P(0|4) \Rightarrow 4 = 2\cdot 0 + n \Rightarrow n = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{t(x) = 2x+4}$

weiterer gemeinsamer Punkt Q:

$f_2(x) = t(x)$

$(x+2)\cdot\sqrt{4-x^2} = 2x+4$

$(x+2)\cdot\sqrt{4-x^2} - 2x - 4 = 0$

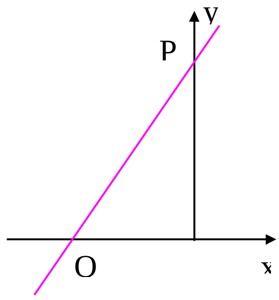
$(x+2)\cdot\left(\sqrt{4-x^2} - 2\right) = 0$

$\Rightarrow \quad x+2=0 \qquad \vee \qquad \sqrt{4-x^2} - 2 = 0$

$x_{S_1} = -2 \qquad\qquad 4 - x^2 = 4 \Rightarrow x_{S_2} = 0 \Leftrightarrow P$

$t(-2) = 0 \Rightarrow \underline{Q(-2\,|\,0)}$

Flächeninhalt des Dreiecks:



$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h_g$

$A = \frac{1}{2}\cdot |x_Q|\cdot f_2(x_P)$

$A = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = \underline{4\,FE} \qquad \underline{= f_2(0) = 4}$

bzw.:

$A = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot f_2(x_P) = f_2(x_P) = f_2(0) \quad \text{mit} \quad x_P = 0$

c)

Volumen des Rotationskörpers: obere Grenze ist die Nullstelle!

$V = \pi\cdot\int_0^a [f(x)]^2\,dx$

$V = \pi\cdot\int_0^a \left[(x+a)\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right]^2 dx$

$V = \pi\cdot\int_0^a (x^2+2ax+a^2)\cdot(a^2-x^2)\,dx$

$V = \pi\cdot\int_0^a (a^2x^2+2a^3x+a^4-x^4-2ax^3-a^2x^2)\,dx$

$V = \pi\cdot\int_0^a (-x^4-2ax^3+2a^3x+a^4)\,dx$

$V = \pi\cdot\left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}ax^4 + a^3x^2 + a^4x\right]_0^a$

$V = \pi\cdot\left(-\frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{2}a^5 + a^5 + a^5\right) = \underline{\frac{13}{10}\pi a^5\ VE} \qquad (\approx 4{,}084\,a^5)$

d)

<u>zu zeigen, daß $f_a = A_{Trapez:}$</u>

$$A_{Trapez} = \frac{a+(a+2x)}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{mit} \quad h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A_{Trapez} = \frac{2a+2\ \ x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \underline{(a+x) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = f_a(x)}$$

<u>Gradmaß des Winkels α für A_{Max}:</u>

$$A'(x) = f_a'(x) = 0 \Rightarrow \quad x_E = \frac{a}{2} \quad \text{aus Teilaufgabe a)}$$

$$\alpha = \varphi + 90°$$

$$\sin(\varphi) = \frac{x}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

$$\Rightarrow \alpha = 30° + 90° = \underline{120°}$$

Aufgabe 1.2. Analysis

Gegeben sind die Funktionen f, g und h durch

$$y = f(x) = \ln(\cos(x)) + 2, \qquad x \in R,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$y = g(x) = \cos\left(\frac{6}{5}x\right) + 1, \qquad x \in R$$

$$y = h(x) = \ln(\cos(x)) + 2 \cdot \cos(x), \qquad x \in R,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Die Graphen dieser Funktionen seien F, G und H.

a) Zeigen Sie, dass der Graph F symmetrisch zur y-Achse liegt.
Ermitteln Sie vom Graphen F die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, die Koordinaten des Extrempunktes sowie dessen Art, und untersuchen Sie den Graphen F auf Existenz von Wendepunkten.
Zeichen Sie den Graphen F.

b) Eine Funktion f_1 habe die gleiche Zuordnungsvorschrift wie die Funktion f, jedoch den größtmöglichen Definitionsbereich D_{f1}.
Ermitteln Sie für diese Funktion f_1 die Nullstellen im Intervall $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.
Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_{f1}.

c) Der Querschnitt eines Stollens sie durcheine Fläche beschrieben, die durch die x-Achse, die Geraden x = -1 und x = 1 sowie den Graphen F begrenzt wird. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Querschnittes näherungsweise, indem Sie das maßgebliche Intervall in mindestens acht gleich große Teilintervalle aufgliedern.
Eine Näherung für den Flächeninhalt erhält man auch, wenn die eine Begrenzung des Querschnittes mit dem Graphen G statt mit dem Graphen F beschrieben wird. Dieser Flächeninhalt sei A_1. Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1.
Die eine Begrenzung des Stollenquerschnittes soll nun durch den Graphen Q einer quadratischen Funktion im Intervall $-1 \le x \le 1$ statt mit dem Graphen F beschrieben werden. Die Graphen Q und F sollen dabei im Extrempunkt und in den Punkten am Anfang und am Ende des gegebenen Intervalls übereinstimmen. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

d) Zeigen Sie, dass der Graph H genau einen Extrempunkt besitzt und dass dieser mit dem Extrempunkt des Graphen F übereinstimmt.

Lösung:
a)

Nachweis der Axialsymmetrie bezüglich der Ordinate:

$$f(x) = f(-x)$$

$$\ln(\cos(x)) + 2 = \ln(\cos(-x)) + 2 \quad \text{mit} \quad \cos(x) = \cos(-x)$$

$$\underline{\ln(\cos(x)) + 2 = \ln(\cos(x)) + 2} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ axialsymmetrisch zur Ordinate}$$

Schnittpunkte mit der Abszisse:

$$f(x) = 0 = \ln(\cos(x)) + 2$$

$$\ln(\cos(x)) = -2 \quad \Big| e^a$$

$$\cos(x) = e^{-2} \quad \text{bzw.} \quad \cos(x) = \frac{1}{e^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1{,}435044 \quad \Rightarrow x_1 = 1{,}44 \\ \text{wegen Symmetrie:} \quad x_2 = 1{,}44 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_1(1{,}44 \mid 0);\ P_2(-1{,}44 \mid 0)}$$

Ableitungen:

$$f(x) = \ln(\cos(x)) + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \underline{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)} \qquad \text{(siehe auch Tafelwerk)}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{-\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$\text{bzw.} = -1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = -1 - \tan^2(x) \quad \text{(auch nach Tafelwerk)}$$

$$f'''(x) = -\frac{-1 \cdot (2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)))}{\cos^4(x)} = -\frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)} = \underline{-2 \cdot \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}}$$

Hinweis: $f'''(x)$ ist für Lösung der Aufgabe nicht erforderlich!

Extrempunkt:

$$f'(x) = 0 = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Big| \cdot \cos(x) \quad \text{für} \quad x \neq \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ im DB}$$

$$\sin(x) = 0$$

$$\underline{x_E = 0} \quad \text{(keine weitere Lösung im DB bzw. laut Aufgabe nur 1 Extrempunkt)}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{\cos^2(0)} = -\frac{1}{1} = \underline{-1 < 0 \Rightarrow \text{Max}}.$$

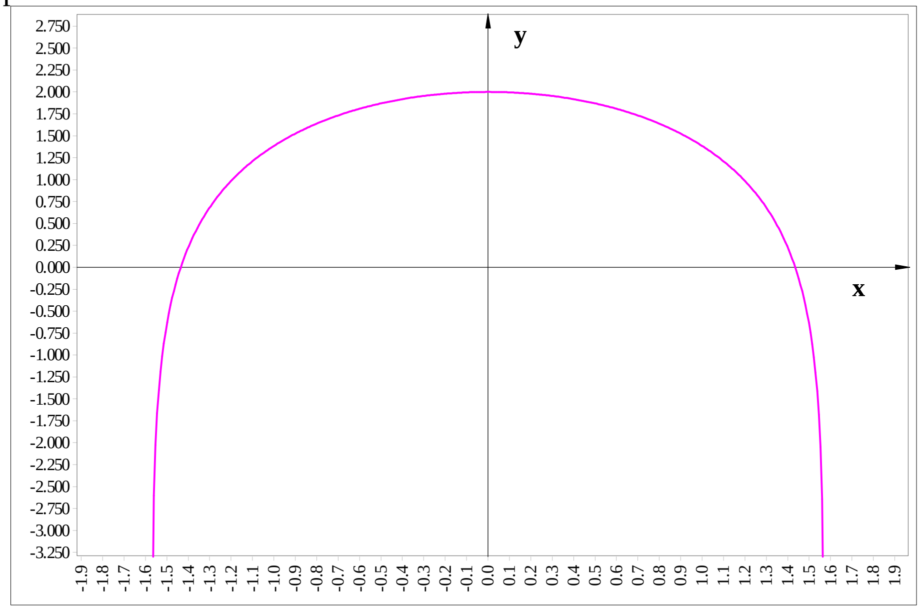
$$f(0) = \ln(\cos(0)) + 2 = \ln(1) + 2 = 0 + 2 = \underline{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{H(0 \mid 2)}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 = -1 - \tan^2(x)$$

$$\tan^2(x) = -1 \Rightarrow \text{n.d.} \Rightarrow \underline{\text{keine WP}}$$

Graph:



b)

<u>weitere Nullstellen:</u>

$x_{0_3} = x_{0_1} + 2\pi = 1{,}44 + 2\pi = \underline{7{,}72}$

$x_{0_4} = x_{0_2} + 2\pi = -1{,}44 + 2\pi = \underline{4{,}84}$

<u>Definitionsbereich:</u>

- Kosinusfunktion für $x \in R$ definiert

– Logarithmusfunktion für $x \in R^+$ definiert

$\Rightarrow$ $f(x)$ nur dort definiert, wo die Kosinusfunktion positiv ist

$\Rightarrow$ Grundintervall für Kosinusfunktion: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung: mit Hilfe der Periodizität von $p = 2\pi$

$$\underline{-\frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi \quad \text{mit} \quad k \in Z}$$

andere Schreibweise:

$$-\frac{\pi + 4k\pi}{2} < x < \frac{\pi + 4k\pi}{2} \Rightarrow \underline{\frac{4k-1}{2}\cdot\pi < x < \frac{4k+1}{2}\cdot\pi \quad \text{mit} \quad k \in Z}$$

c)

<u>näherungsweise Querschnittsberechnung:</u>

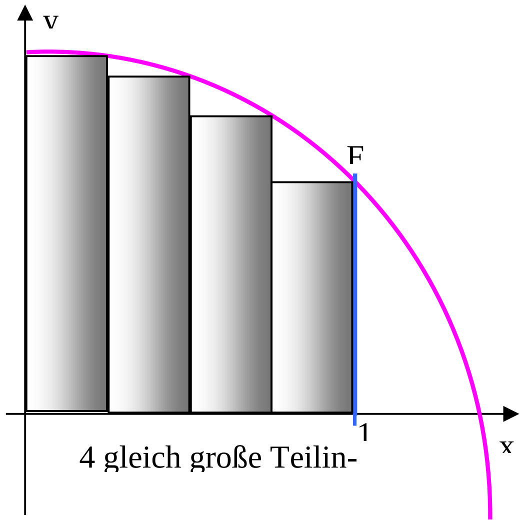
wegen der Axialsymmetrie nur $x > 0$ betrachtet

$\Rightarrow$ 4Intervalle

jedes Intervall als Rechteck

Breite: $\frac{1}{4}$ Höhe: $f(x)$

Flächeninhalt:



$$A = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (1,968 + 1,869 + 1,688 + 1,384)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,909 = \underline{3,45}$$

<u>Berechnung von A_1:</u>

$$A_1 = 2 \cdot \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{6}{5}x\right) + 1 \right) dx = 2 \cdot \left[\frac{5}{6} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}x\right) + x \right]_0^1$$

$$A_1 = 2 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}\right) + 1 \right) = 2 \cdot 1,777 \Rightarrow \underline{A_1 = 3,55}$$

<u>Gleichung der quadratischen Funktion:</u>

$q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

(1) $H(0 \mid 2)$ ist Scheitelpunkt von Q $\Rightarrow \underline{c = 2}$

(2) $q(1) = f(1) = 1,38$

(3) $q(-1) = f(-1) = -1,38$

$\Rightarrow 1,38 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \quad \wedge \quad 1,38 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2$

$1,38 = a + b + 2 \qquad 1,38 = a - b + 2$

$\Rightarrow \underline{b = 0} \Rightarrow \underline{a = 0,62} \qquad \Rightarrow \underline{q(x) = 0,62\,x^2 + 2}$

d)

<u>Extrempunkt von h(x):</u>

Ableitungen:

$$h(x) = \ln(\cos(x)) + 2 \cdot \cos(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) - 2 \cdot \sin(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 2 \cdot \sin(x) = \underline{-\sin(x) \cdot \left(\frac{1}{\cos(x)} + 2 \right)}$$

$$h''(x) = -\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} - 2\cos(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)} - 2\cos(x)$$

notwendige Bedingung:

$$h'(x) = 0 = -\sin(x) \cdot \left(\frac{1}{\cos\ \ (x)} + 2 \right)$$

$$-\ \sin(x) = 0 \qquad \vee \qquad \frac{1}{\cos(x)} + 2 = 0$$

$$\underline{x_{E_1} = 0} \qquad \frac{1}{\cos(x)} = -2 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{E_2} = 2{,}09 \notin DB$$

kein weterer Extrempunkt im angegebenen Intervall möglich!

hinreichende Bedingung:

$$h''\left(0\right) = -\frac{1}{\cos^2(0)} - 2\cos(0) = -\frac{1}{1} - 2 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

Hochpunkt:

$$h(0) = \ln\left(\cos(0)\right) + 2 \cdot \cos(0) = \ln\left(1\right) + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{H\left(0 \mid 2\right)}$$

$\Rightarrow$ stimmt mit HP von F überein (siehe Teilaufgabe a)