Abitur - Leistungskurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 1997

Gebiet L1 - Analysis

Aufgabe 1.1.

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch

$y = f_a(x) = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1,\ \ x \in R,\ \ x > 0;\ \ a \in R,\ \ a > 0$

Die Graphen der Funktionen der Schar in einem kartesischen Koordinatensystem seien mit G_a bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_2.
Ermitteln Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen G_2.

[Ergebnis zur Kontrolle: W (e^2 | 1)]

Zeichnen Sie den Graphen G_2 für $0 < x \le 12$.

b) Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt W (siehe Aufgabe a) schneidet den Graphen G_2 in einem weiteren Punkt P.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes.

An den Graphen G_2 wird im Punkt P die Tangente t_1 und im Wendepunkt die Tangente t_2 gelegt. Die beiden Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt S.
Zeigen Sie, dass das Dreieck WPS stumpfwinklig ist.

Am Graphen G_2 existiert eine Tangente t_3, deren Anstieg die Hälfte des Anstiegs der Tangente t_2 beträgt. Der
Berührungspunkt dieser Tangente t_3 am Graphen G_2 sei der Punkt Q.
Die Abszisse des Punktes Q soll mit dem allgemeinen Iterationsverfahren berechnet werden.
Leiten Sie dafür die nachfolgend genannte Iterationsvorschrift her, und berechnen Sie die Abszisse auf Hundertstel genau.

$x_{n+1} = e^{\frac{1}{2e^2} x_n + 1}$ (Das Konvergenzverhalten ist nicht nachzuweisen.)

c) Untersuchen Sie die Funktionen der Schar f_a auf Existenz von Nullstellen.
Der Graph G_2, jeder weitere Graph G_a und die Gerade mit der Gleichung $x = e^2$ schließen jeweils eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a für den Fall, dass die Maßzahl des Flächeninhalts $A = e^2 + 1$ ist.
(Hinweis: $\int \ln(x)\ dx = x \cdot \ln(x) - x + c$)

Lösung:

a) $f_2(x) = (\ln x)^2 - 2\cdot\ln x + 1$

<u>Nullstellen:</u> $(\ln x)^2 - 2\cdot\ln x + 1 = 0$ Substitution: $b = \ln x$

$$b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = e}}$$

$f_2(x) = (\ln x)^2 - 2\cdot\ln x + 1$

<u>Ableitungen:</u>

$$f_2{}'(x) = 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln(x)-2}{x}$$

$$f_2{}''(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x - (2\cdot\ln(x)-2)}{x^2} = \frac{4-2\cdot\ln(x)}{x^2}$$

$$f_2{}'''(x) = \frac{-2\frac{1}{x}\cdot x^2 - (4-2\cdot\ln(x))\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2-8+4\cdot\ln(x)}{x^3} = \frac{4\cdot\ln(x)-10}{x^3}$$

<u>Extrempunkte:</u>

$$f_2{}'(x) = \frac{2\ln(x)-2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x_E = e$$

$$f''(e) = \frac{4-2}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

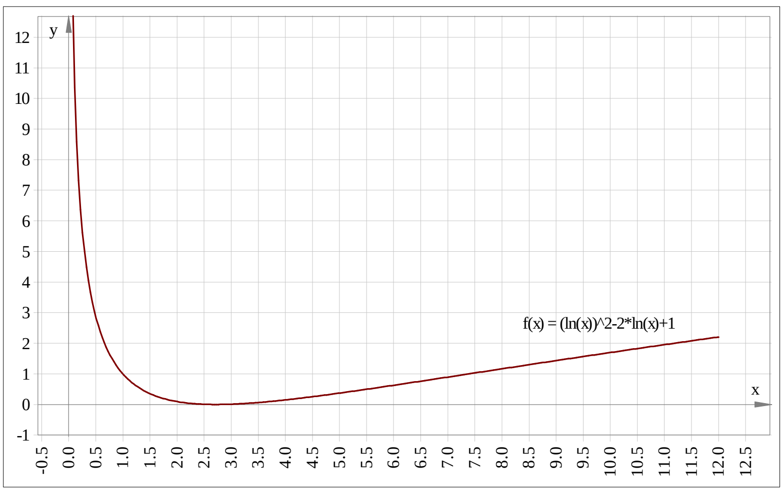
$$f_2(e) = 1^2 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(e\,|\,0)}}$$

<u>Wendepunkte:</u>

$$f_2{}''(x) = \frac{4-2\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x_w = e^2$$

$$f_2{}'''(e^2) = \frac{4\cdot 2-10}{e^6} = -\frac{2}{e^6} \neq 0$$

$$f_2(e^2) = 2^2 - 2\cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{W(e^2\,|\,1)}}$$



b)

$$f_2(x_w) = f_2(x_P) = 1 \Rightarrow 1 = \left(\ln(x)^2\right)^2 - 2\ln(x) + 1$$

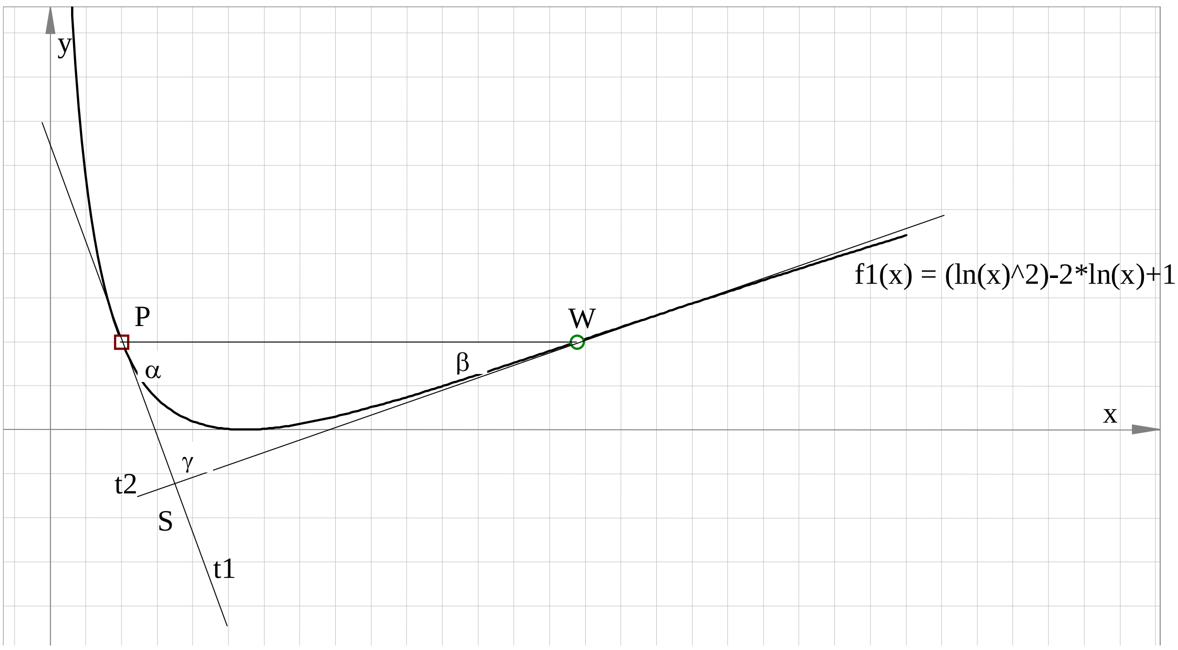
$$2\ln(x) = \ln(x)^2$$

$$0 = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$$

$$\ln(x) = 0 \quad \vee \quad \ln(x) = 2$$

$$x_P = 1 \qquad x_w = e^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P(1|1)}}$$



$$f_2'(x_P) = f_2'(1) = \frac{2 \cdot \ln(1) - 2}{1} = -2 = m_P; \quad \alpha = \left|\arctan(-2)\right| = 63,43°$$

$$f_2'(x_W) = f_2'(e^2) = \frac{2 \cdot \ln\left(e^2\right) - 2}{e^2} = \frac{4-2}{e^2} = \frac{2}{e^2} = m_W; \quad \alpha = \left|\arctan\left(\frac{2}{e^2}\right)\right| = 15,15°$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\gamma = 101,42°}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta PSW \text{ ist stumpfwinklig}$$

$$m_{t_3} = \frac{1}{2} m_{t_2} \quad \Leftrightarrow m_{t_3} = \frac{1}{2} \cdot f_2{}'\left(e^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

zu diesem Anstieg gehört ein x-Wert mit $\frac{1}{e^2} = f_2{}'(x) = \frac{2\ln(x_{n+1}) - 2}{x_n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^2} = \frac{2\ln(x_{n+1}) - 2}{x_n}$$

$$\frac{x_n}{e^2} + 2 = 2\ln(x_{n+1})$$

$$\frac{x_n}{2 \cdot e^2} + 1 = \ln(x_{n+1})$$

$$e^{\frac{x_n}{2 \cdot e^2} + 1} = x_{n+1}$$

$$x_{n+1} = e^{\frac{1}{2 \cdot e^2} x_n + 1}$$

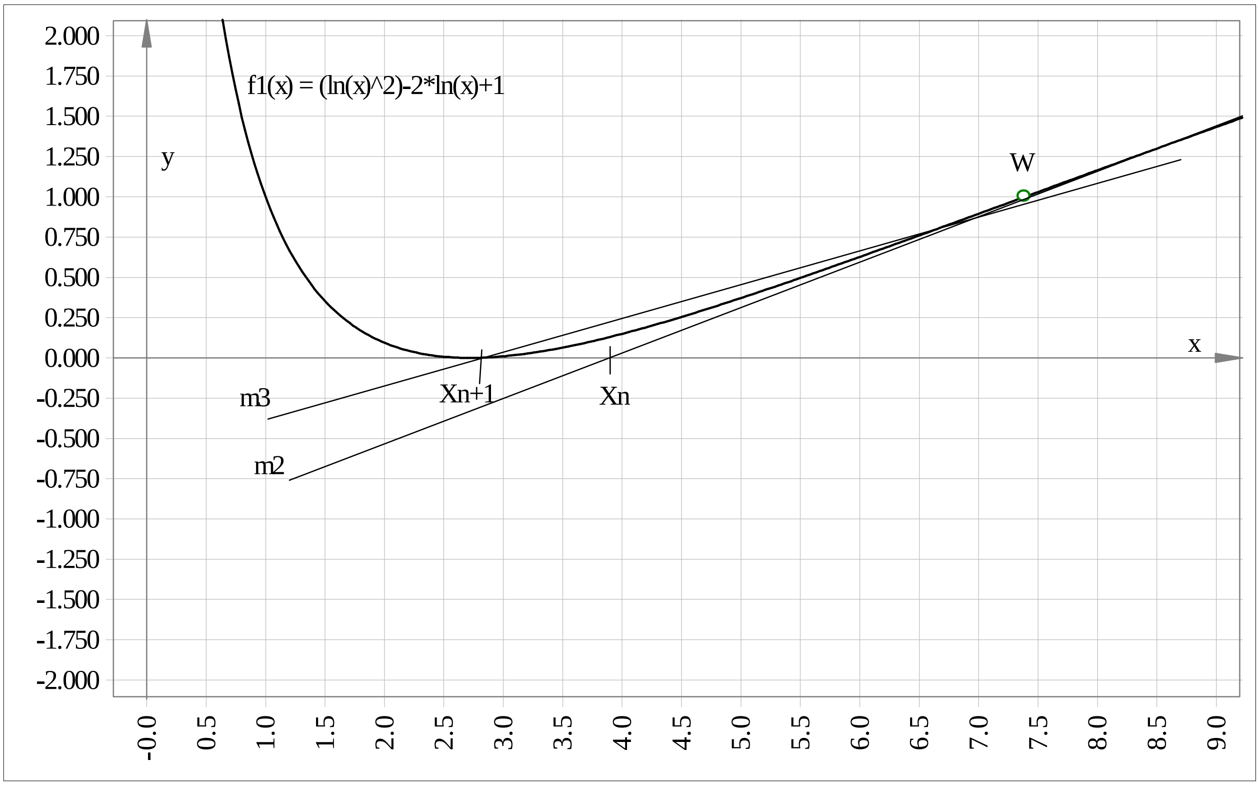
Startwert $\quad x_0 = 3$

$$\Rightarrow \quad x_1 = e^{\frac{3}{2 \cdot e^2} + 1} = 3{,}330$$

$$x_2 = e^{\frac{3{,}330}{2 \cdot e^2} + 1} = 3{,}405$$

$$x_3 = e^{\frac{3{,}405}{2 \cdot e^2} + 1} = 3{,}422$$

$$x_4 = e^{\frac{3{,}422}{2 \cdot e^2} + 1} = 3{,}43 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 3{,}43}}$$



c)

$$f_a(x) = \left(\ln(x)\right)^2 - a \cdot \ln(x+1)$$

Nullstellen:

$$\left(\ln(x)\right)^2 - a \cdot \ln(x+1) = 0 \qquad \text{Substitution: } b = \ln(x)$$

$$b^2 - a \cdot b + 1 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-4}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2-4}$$

$\Rightarrow$ keine Nullstelle, wenn $a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a < 2$

eine Nullstelle, wenn $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

zwei Nullstellen, wenn $a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a > 2$

nicht gefordert: $x_{0_1} = e^{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-4}}$; $x_{0_2} = e^{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-4}}$

Parameter des Flächeninhalts

untere Integrationsgrenze:

$$f_2(x) = f_a(x)$$

$$\left(\ln(x)\right)^2 - 2 \cdot \ln(x) + 1 = \left(\ln(x)\right)^2 - a \cdot \ln(x) + 1$$

$$2 \cdot \ln(x) = a \cdot \ln(x)$$

$$(2-a) \cdot \ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = 0 \Rightarrow x_s = 1$$

$$A = \left| \int_1^{e^2} \left(f_2(x) - f_a(x)\right) dx \right| = \left| \int_1^{e^2} \left(\left(\ln(x)\right)^2 - 2 \cdot \ln(x) + 1 - \left(\ln(x)\right)^2 + a \cdot \ln(x) - 1 \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^{e^2} \left((a-2) \cdot \ln(x) \right) dx \right| = \left| \left[(a-2) \cdot \left(x\ln(x) - x \right) \right]_1^{e^2} \right|$$

$$A = \left| (a-2) \cdot \left(e^2 \cdot \ln(e^2) - e^2 - 1 \cdot \ln(1) + 1 \right) \right| = \left| (a-2) \cdot \left(2 \quad e^2 - e^2 + 1 \right) \right| = \left| (a-2) \cdot \left(e^2 + 1 \right) \right|$$

$$\Rightarrow e^2 + 1 = \left| (a-2) \right| \cdot \left(e^2 + 1 \right)$$

wenn $a - 2 < 0$ dann $-a + 2 = 1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$

wenn $a - 2 > 0$ dann $a - 2 = 1 \Rightarrow \qquad a = 3$

andere Möglichkeit:

1. Fall:

$$e^2 + 1 = \int_1^{e^2} \left(f_2(x) - f_a(x) \right) \, dx \qquad \left(f_2 \text{ obere Funktion } \right)$$

$$e^2 + 1 = \int_1^{e^2} \left(-2\ln(x) + a\ln(x) \right) \, dx$$

$$e^2 + 1 = (a-2) \cdot \left(e^2 + 1 \right)$$

$$1 = a - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

2. Fall:

$$e^2+1=\int_1^{e^2}\left(f_a(x)-f_2(x)\right)\ dx \qquad \left(f_a \quad \text{obere} \quad \text{Funktion}\ \right)$$

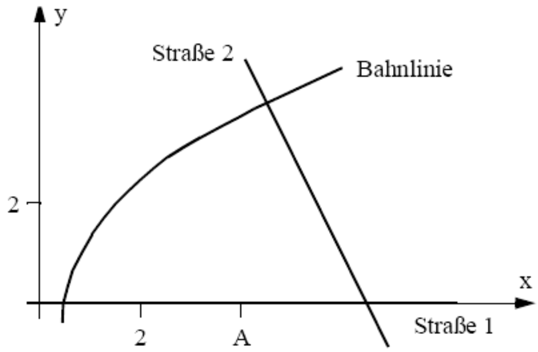
$$e^2+1=\int_1^{e^2}\left(-a\ln(x)+2\ln(x)\right)\ dx$$

$$e^2+1=\left(-a+2\right)\cdot\left(e^2+1\right)$$

$$1=-a+2 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

Aufgabe 1.2

Ein in ebenem Gelände liegender Freizeitpark wird durch zwei geradlinig verlaufende Straßen und eine Bahnlinie vollständig begrenzt.
Die Lagebeschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Einheit 100 m im Gelände entspricht. Die Breite der Straßen und der Bahnlinie bleibt unberücksichtigt (siehe Skizze).
Die Straße 1 verläuft auf der Abszissenachse. Die Straße 2 kreuzt die Bahnlinie im Punkt S(4,5 | 4) rechtwinklig und schneidet die Straße 1 im Punkt P(6,5 | 0). Die Bahnlinie wird im Bereich des Freizeitparkes durch die Gleichung einer Funktion der Form $y = f(x) = \sqrt{a\,x + b}$ beschrieben.



a) Ermitteln Sie je eine Gleichung für die Funktion, die im Verlauf der Straße 2 bzw. der Bahnlinie im Bereich des Freizeitparkes beschreibt.

$$\left[\text{Teilergebnis zur Kontrolle: } y = f(x)\sqrt{4\,x - 2}\right]$$

Bestimmen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Straßen 1 und 2.

b) Die Bahnlinie erhält einen Haltepunkt B, dessen Entfernung zum Punkt A(4 | 0) minimal ist. Berechnen Sie diese Entfernung.
Ein geradliniger Zugangsweg zum Haltepunkt B von der Straße 2 soll tangential zur Bahnlinie angelegt werden. Stellen Sie eine Gleichung der Funktion auf, die den Verlauf des Weges beschreibt.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Freizeitparkes in Hektar.
Der Freizeitpark soll durch einen rechtwinklig zur Straße 1 verlaufenden, geradlinigen Weg in zwei flächengleiche Stücke geteilt werden. Berechnen Sie für diesen Fall die Koordinaten des Punktes Z, in dem der Weg in die Straße 1 mündet.

Lösung:

a) <u>Ermittlung der Funktionsgleichungen:</u>

Gleichung der Straße 2:

$g(x) = m_2 x + n_2$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4,0}{2,0} = -2$$

mit $S(4,5|4) \Rightarrow 4 = -2 \cdot 4,5 + n_2 \Rightarrow n_2 = 13$

$g(x) = -2x + 13$

Gleichung der Bahnlinie:

$y = f(x) = \sqrt{ax+b}$

Bedingung 1: mit $S(4,5|4)$ als Punkt der Bahnline $\Rightarrow$

(1): $f(4,5) = 4 = \sqrt{a \cdot 4,5 + b}$

Bedingung 2: $f(x)$ schneidet Straße 2 rechtwinklig $(g(x)$ ist Normale zu $f(x)$ im Punkt S$)$

$f'(x) = f'(4,5) = g'(x) = -1$

$f(x) = \sqrt{ax+b} = (ax+b)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (ax+b)^{-\frac{1}{2}} \cdot a = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{ax+b}}$$

$$f'(4,5) = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{4,5 \cdot a + b}}$$

$g(x) = -2x + 13 \Rightarrow g'(x) = -2$

Damit ergibt sich für Bedingung 2:

$$(2) \qquad \frac{a}{2 \cdot \sqrt{4,5 \cdot a + b}} \cdot (-2) = -1$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt:

$$\frac{a}{2 \cdot 4} \cdot (-2) = -1 \Rightarrow a = 4$$

Durch Einsetzewn von z.B. in (1) ergibt sich:

$4 = \sqrt{4 \cdot 4,5 + b} = \sqrt{18 + b}$

$16 = 18 + b \Rightarrow b) - 2$

Damit ergibt sich die Funktion für die Gleichung der Bahnlinie zu:

$y = f(x) = \sqrt{4x - 2}$

<u>Gradmaß des Schnittwinkels:</u>

$\tan(\alpha) = g'(4,5)$

$\alpha = \arctan(g'(4,5)) = \arctan(-2) = -63,43°$

(in negativer Drehrichtung gemessen)

$\Rightarrow \alpha_1 = 63,43°$ und $\alpha_2 = 116,57°$

b)

<u>Minimale Entfernung vom Haltepunkt B zum Punkt A:</u>

Bestimmen der Koordinaten von B:

Abstand der Punkte A und B:

$$d(x)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$d(x)=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{4x-2}-0\right)^2}$$

$$d(x)=\sqrt{x^2-8x+16+4x-2}=\sqrt{x^2-4x+14}$$

Minimale Entfernung: $d'(x)=0; d''(x)>0$

$$d(x)=\sqrt{x^2-4x+14}=\left(x^2-4x+14\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-4x+14\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-4)=\frac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+14}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+14}}$$

$$\Rightarrow x_E-2=0\Rightarrow x_E=2$$

notwendige Bedingung

1.mit 2. Ableitung:

$$d'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+14}}$$

$$d''(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x^2-4x+14}-(x-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-4x+14\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-4)}{x^2-4x+14}$$

$$d''(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x^2-4x+14}-\frac{(x-2)\cdot(2x-4)}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+14}}}{x^2-4x+14}$$

$$d''(x)=\frac{\frac{2\cdot x\cdot\left(x^2-4x+14\right)-(x-2)\cdot(2x-4)}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+14}}}{x^2-4x+14}$$

$$d''(x)=\frac{2x^3-8x^2+28x+2x^2+4x+4x-8}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+14}\cdot\left(x^2-4x+14\right)}$$

$$d''(x)=\frac{2x^3-8x^2+28x+2x^2+8x-8}{2\cdot\sqrt{\left(x^2-4x+14\right)^3}}$$

$$d''(x)=\frac{2x^3-6x^2+36x-8}{2\cdot\sqrt{\left(x^2-4x+14\right)^3}}$$

$$d''(2)=\frac{16-24+72-8}{2\cdot\sqrt{(4-8+14)^3}}=\frac{28}{\sqrt{(10)^3}}>0\Rightarrow \text{Min.}$$

2. über Minimumeigenschaften in der Umgebung von x_E und Intervallgrenzen:

$f(1)=\sqrt{11};\quad f(2)=\sqrt{10};\quad f(3)=\sqrt{11}$

$d(0,5)=\sqrt{16,26}=4,03;\quad d(0,5)=\sqrt{12,25}=3,5;\quad d(2)=\sqrt{10}=3,16$

$\Rightarrow$ Die minimale Entfernung der Haltepunkte A und B beträgt 316 m.

<u>Tangentengleichung t(x) für Weg von B zur Straße 2:</u>

Tangentengleichung:

$$t(x) = m_t \cdot x + n_t$$

$$f(x) = \sqrt{4x-2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-2}}$$

$$m = f'(2) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

mit $B(2 \mid f(2)) \Leftrightarrow B(2 \mid \sqrt{6}) \Rightarrow$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot 2 + n_t \Rightarrow n_t = \sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \underline{t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot x + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

oder:

$$m = \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{t(x) - f(2)}{x-2}$$

$$t(x) = m \cdot (x - x_B) + f(2)$$

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot (x-2) + \sqrt{6} = \underline{\frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot x + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

c)

<u>Flächeninhalt des Freizeitparkes:</u>

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x)\,dx + A_V \qquad \text{mit } A_V = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot f(4{,}5)$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} \left(\sqrt{4x-2}\right) dx + \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot f(4{,}5) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} (4x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot f(4{,}5)$$

$$A = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (4x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \left[\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4x-2)^3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} + 4$$

$$A = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{\left(4 \cdot \frac{9}{2} - 2\right)^3} - \sqrt{\left(4 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)^3}\right) + 4$$

$$A = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{16^3} - \sqrt{0^3}\right) + 4 = \frac{1}{6} \cdot 16 \cdot 4 + 4 = \frac{32}{3} + 4 = \frac{32+12}{3} = \frac{44}{3} = \underline{14\frac{2}{3}}$$

Der Flächeninhalt des Freizeitparkes beträgt 14,67 ha.

Koordinaten des Punktes Z:

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{x_Z} f(x)\,dx = \frac{22}{3}$$

$$\left[\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(4x-2)^3}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_Z} = \frac{22}{3}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{(4x_Z-2)^3}\right) = \frac{22}{3}$$

$$\sqrt{(4x_Z-2)^3} = 44$$

$$(4x_Z-2)^3 = 1936$$

$$4x_Z = \sqrt[3]{1936}+2$$

$$x_Z = \frac{\sqrt[3]{1936}}{4}+\frac{1}{2} = 3,62$$

$$\Rightarrow \underline{Z(3,62\,|\,0)}$$