Abitur - Grundkurs Mathematik
(Grundlegendes Anforderungsniveau)

Sachsen-Anhalt 2014

Aufgabe 4.2: Analytische Geometrie

Aufgabe 4.2

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Lage in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene wie folgt beschrieben ist:
Der Punkt A liege im Koordinatenursprung.
Von den Punkten B und C sei bekannt: $B(x_B > 0 \mid y_B)$ sowie $C(0 \mid a > 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie, dass der Punkt B die Koordinaten $x_B = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $y_B = \frac{a}{2}$ hat.

Die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC schneiden einander im Punkt S.
Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC ist.

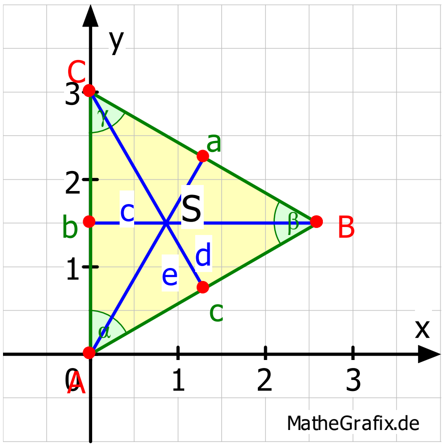
Ermitteln Sie eine Gleichung für eine weitere Seitenhalbierende und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.

Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und es gelte $\overrightarrow{CS} = k \cdot \overrightarrow{CM}$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie k und schlussfolgern Sie aus dem Wert von k auf das Verhältnis der Radien von Inkreis und Umkreis des Dreiecks ABC.

Lösung:

Koordinaten des Punktes B:

- gleichseitiges Dreieck $\Rightarrow$ Höhe $h_{\overline{AC}}$ ist auch Seitenhalbierende
  - $\Rightarrow y_B = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$
- x_B ist Länge der Höhe $\Rightarrow$ Tafelwerk S. 19
  - $\Rightarrow x_B = h_{\overline{AC}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



Richtungsvektor zeigen:

$$M_{\overline{AC}}\left(\frac{a}{2}\,|\,0\right) \qquad B\left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}-0 \\ \frac{a}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$y = \frac{a}{2}$ ist von der x-Achse nur um $\frac{a}{2}$ verschoben und da die Höhe parallel zur x-Achse, kann bei Betrachtung des Vektors auch der Parallelvektor auf der x-Achse verwendet werden.

$$\overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\vec{v}$$

weitere Seitenhalbierende:

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \frac{a}{2}\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\overline{AB}}\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{4}\right);\quad C(0\,|\,a) \Rightarrow \overrightarrow{M_{\overline{AB}}C} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_{\overline{AB}} = \overrightarrow{OM} + r\cdot\overrightarrow{M_{\overline{AB}}C} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}}$$

oder :

$$\overrightarrow{M_{\overline{BC}}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a}{2}\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\overline{BC}}\left(-\frac{a}{4}\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{4}\right);\quad C(0\,|\,a) \Rightarrow \overrightarrow{M_{\overline{BC}}C} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_{\overline{BC}} = \overrightarrow{OM_{\overline{BC}}} + s\cdot\overrightarrow{M_{\overline{BC}}C} = \underline{\begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix}}$$

Koordinaten des Punktes S:

$$s_{\overline{AB}} = \overrightarrow{OM} + r\cdot\overrightarrow{M_{\overline{AB}}C} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{M_{\overline{AC}}B} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}-0 \\ \frac{a}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: \quad \frac{a}{4}\sqrt{3} - \frac{a}{4}\sqrt{3}\cdot r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$\text{II}: \quad \frac{a}{4} + \frac{3}{4}a\cdot r = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}a\cdot r = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} \Rightarrow \quad \frac{3}{4}a\cdot r = \frac{a}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{4}\cdot\frac{4}{3a} = \frac{1}{3}\text{in Ausgangsgleichung}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ \frac{a}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a}{12}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{6}\sqrt{3} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S\left(\frac{a}{6}\sqrt{3} \mid \frac{a}{2}\right)}$$

Ermitteln von k:

$$M_{\overline{AB}}\left(\frac{a}{4}\sqrt{3} \mid \frac{a}{4}\right);\; C(0 \mid a);\, S\left(\frac{a}{6}\sqrt{3} \mid \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} \frac{a}{6}\sqrt{3} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4}a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CS} = k\cdot\overrightarrow{CM}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{6}\sqrt{3} = k\cdot\frac{a}{4}\sqrt{3} \Rightarrow k = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{4}{a\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \\ -\frac{a}{2} = k\cdot\left(-\frac{3}{4}a\right) \Rightarrow k = \frac{a}{2}\cdot\frac{4}{3a} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \underline{k = \frac{2}{3}}$$

Radien – In- und Umkreis:

- Inkreismittelpunkt: Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
- Umkreismittelpunkt: Schnittpunkt der Mittelsenkrechten
- Schwerpunkt: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden
- Im gleichseitigen Dreieck fallen die Seitenhalbierenden, die Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammen.
- Deshalb ist S sowohl Mittelpunkt des Inkreises als auch Mittelpunkt des Umkreises

Umkreisradius: $r_u = \overline{SC} = \frac{2}{3}\overline{CM}$

Inkreisradius: $r_i = \overline{SM} = \frac{1}{3}\overline{CM}$

$$\underline{\frac{r_i}{r_u} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r_i : r_u = 1:2}$$