Abitur - Grundkurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 2010

Gebiet G1 - Analysis

Aufgabe 1 - Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_b durch

$$y = f_b(x) = \frac{5}{x} - 5bx \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq o,\ b > 0$$

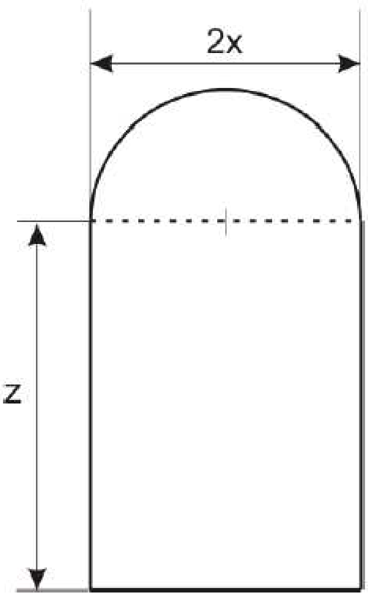
Ihre Graphen seien G_b.

a) Untersuchen Sie die Funktionen f_b auf Nullstellen, Polstellen sowie auf das Verhalten für $x \to \pm\infty$.
Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach:
(1) Die Funktionen f_b sind monoton fallend.
(2) Die Graphen G_b sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
Zeichnen Sie den Graphen G_b für $b = \frac{1}{5}$ im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Der Graph G_b für $b = \frac{1}{5}$, die Gerade mit der Gleichung x = 1 und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Eine Firma produziert Garderobenspiegel in Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. Abbildung). Die Spiegelfläche von 2 m² wird von einem Spiegelrahmen vollständig eingefasst. Die Kosten für die Herstellung eines Spiegelrahmens werden wie folgt kalkuliert:

- kreisförmig gebogener Teil des Rahmens mit dem Radius x (in m): 50 € pro Meter
- übrige Rahmenteile: 25 € pro Meter.



c) Die Längen z und x stehen in einem funktionalen Zusammenhang, der zum Aufstellen einer Funktionsgleichung für die Kosten eines Spiegelrahmens benötigt wird.
Entwickeln Sie eine Gleichung, die z in Abhängigkeit von x beschreibt.
Die Funktion K mit

$$y = K(x) = 50 \cdot \left(\frac{3}{4}\pi \cdot x + x + \frac{1}{x} \right) \quad \text{und} \quad x > 0$$

beschreibt die Kosten y (in €) für einen Spiegelrahmen in Abhängigkeit von x (in m).
Ermitteln Sie die Längen x und z für den Fall, dass die Kosten für einen Spiegelrahmen minimal sind.

Lösung:

a) <u>Nullstellen:</u> $f_b(x)=0$

$$\frac{5}{x}-5bx=0$$

$$5-5bx^2=0$$

$$x^2=\frac{1}{b}\Rightarrow \underline{x_{0_1}=\frac{1}{\sqrt{b}}};\quad \underline{x_{0_2}=-\frac{1}{\sqrt{b}}}$$

<u>Polstellen:</u>

Definitionslücke $\underline{x_P=0}$

<u>Verhalten im Unendlichen:</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}-5bx\right)=\frac{5}{\infty}-5b\cdot\infty=0-\infty=\underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}-5bx\right)=-\frac{5}{\infty}-5b\cdot(-\infty)=0+\infty=\underline{\infty}$$

<u>Eigenschaften nachweisen:</u>

(1) monoton fallend: $f'(x)<0$

$$f'(x)=-\frac{5}{x^2}-5b$$

- $b>0$ und $x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\Rightarrow x^2>0$
- beide Summanden negativ
- Summe negativ $\Rightarrow$w. A.

(2) Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

$$-f(x)=f(-x)$$

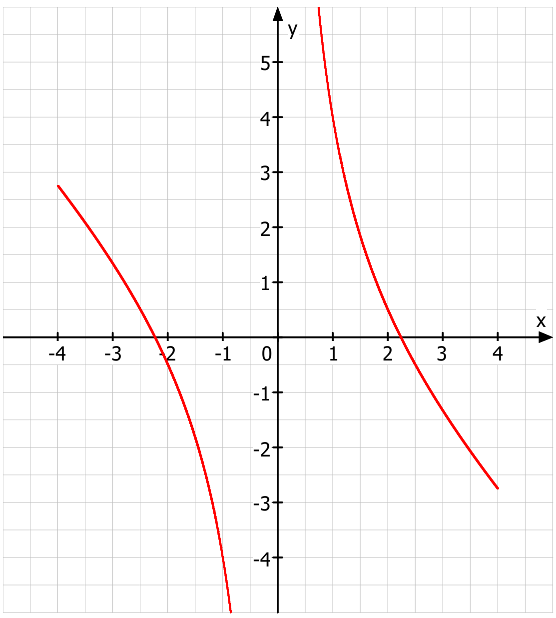
$$-\left(\frac{5}{x}-5bx\right)=\frac{5}{-x}-5b\cdot(-x)$$

$$-\frac{5}{x}+5bx=-\frac{5}{x}+5bx\ \Rightarrow \text{ wahre Aussage}$$

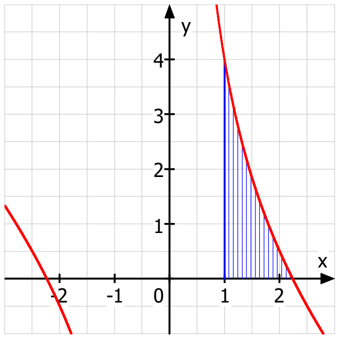
<u>Graph:</u> $f_{\frac{1}{5}}=\frac{5}{x}-x$

Wertetabelle:

x	f(x)	x	f(x)
-4	2,75	0,5	9,50
-3,5	2,07	1,0	4,00
-3	1,33	1,5	1,83
-2,5	0,50	2,0	0,50
-2	-0,50	2,5	-0,50
-1,5	-1,83	3,0	-1,33
-1	-4,00	3,5	-2,07
-0,5	-9,5	4,0	-2,75
0	n.d.		



b) Flächeninhalt: obere Grenze - Nullstelle



$$A = \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{x} - x \right) dx = \left[5 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= 5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(5 \cdot \ln(1) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right)$$

$$= 5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \underline{5 \cdot \ln\left(\sqrt{5}\right) - 2 = 2{,}02}$$

c) <u>Gleichung z(x):</u>

$A = A_1 + A_2$ $\quad A_1 -$ Halbkreis $\quad A_2 -$ Rechteck

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 + a \cdot b \quad \text{mit} \quad r = x;\ a = 2x;\ b = z$$

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot z$$

$$2 \cdot x \cdot z = A - \frac{1}{2} \pi \cdot x^2$$

$$z = \frac{A}{2x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x$$

<u>Ermittlung der Längen:</u>

$$K(x) = 50 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi \cdot x + x + \frac{1}{x} \right) \quad \text{und} \quad x > 0$$

$$K'(x) = 50 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi + 1 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$50 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4} \pi + 1$$

$$x^2 = \frac{1}{\frac{3}{4} \pi + 1} = \frac{1}{\frac{3\pi + 4}{4}} = \frac{4}{3\pi + 4} \Rightarrow \underline{x = 0{,}546} \quad \text{da} \quad x > 0$$

$$K''(x) = 50 \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{100}{x^3}$$

$$K''(0{,}546) = 614{,}4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$z = \frac{A}{2x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x = \frac{2}{2 \cdot 0{,}546} - \frac{1}{4} \pi \cdot 0{,}546 = \underline{1{,}403}$$

Wenn man die Kostengleichung herleiten möchte (nicht gefordert):

$$K(x) = 50 \cdot \pi \cdot x + 25 \cdot (2x + 2z) = 50 \cdot \pi \cdot x + 50 \cdot x + 50 \cdot z \qquad \text{mit} \quad z = \frac{A}{2x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x \quad \text{und} \quad A = 2$$

$$K(x) = 50 \cdot \pi \cdot x + 50 \cdot x + 50 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x \right)$$

$$K(x) = 50 \cdot \pi \cdot x + 50 \cdot x + \frac{50}{x} - \frac{50}{4} \pi \cdot x$$

$$K(x) = 50 \cdot \left(\pi \cdot x + x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \pi \cdot x \right)$$

$$\underline{K(x) = 50 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi \cdot x + x + \frac{1}{x} \right)}$$