Abitur - Grundkurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 2004

Gebiet G2 – Analytische Geometrie

Aufgabe 2.2.
In einem kartesischen Koordinatensystem seien gegeben Die Punkte $A(8\,|\,-4)$ und $P(-6\,|\,6)$ sowie die Gerade g durch $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in R$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der Geraden durch die Punkte A und P sowie das Gradmaß des Schnittwinkels beider Geraden.

b) Gegeben seien Kreise durch
$\left(x - (1+5n)\right)^2 + \left(y - (1+7n)\right)^2 = 74\left(1+n^2\right),\ n \in Z$.

Zeigen Sie, dass der Punkt A auf jedem dieser Kreise liegt.

Geben Sie die Gleichung jenes Kreises k an, für den n = 0 ist.

Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{AP}$ Durchmesser des Kreises k ist.

c) Die Gerade g schneidet den Kreis k aus Aufgabe b genau in zwei Punkten B und C.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Diese Punkte bilden mit dem Punkt A das Dreieck ABC.
Zeigen Sie: Fällt man vom Punkt P aus die Lote auf jede der Seiten des Dreiecks ABC bzw. deren Verlängerung, so liegen die sich ergebenden Lotfußpunkte auf genau einer Geraden.

Lösung:

a)

$$h: \overrightarrow{AP} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt:

I: $8 - 7r = 8 - 6t$

II: $-4 + 5r = 6 + t \Rightarrow t = 5r - 10$ in I:

$$8 - 7r = 8 - 6 \cdot (5r - 10)$$

$$-7r = -30r + 60$$

$$23r = 60 \Rightarrow r = \frac{60}{23} \Rightarrow t = \frac{300}{23} - 10 = \frac{70}{23}$$

$$t \text{ in } g: \quad x = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{70}{23} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \frac{420}{23} \\ 6 + \frac{70}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{236}{23} \\ \frac{208}{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S\left(-\frac{236}{23} \mid \frac{208}{23}\right)}$$

oder / und:

$$r \text{ in } h: \quad x = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{60}{23} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \frac{420}{23} \\ -4 + \frac{300}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{236}{23} \\ \frac{208}{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S\left(-\frac{236}{23} \mid \frac{208}{23}\right)}$$

Schnittwinkel:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{7^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 1}} = \frac{42 + 5}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{37}} = \frac{47}{\sqrt{2738}} = 0{,}8982 \Rightarrow \varphi = \underline{26{,}08°}$$

b)

Kreis:

$$\left(x - [1 + 5n]\right)^2 + \left(y - [1 + 7n]\right)^2 = 74 \cdot (1 + n^2);\ n \in \mathbb{Z}$$

A in K:

$$\left(8 - [1 + 5n]\right)^2 + \left(6 - [1 + 7n]\right)^2 = 74 \cdot (1 + n^2)$$

$$(7 + 5n)^2 + (-5 + 7n)^2 = 74 + 74n^2$$

$$49 + 70n + 25n^2 + 25 - 70n + 49n^2 = 74 + 74n^2$$

$$74n^2 + 74 = 74 + 74n^2$$

$\Rightarrow$ wahre Aussage füralle $n \in \mathbb{Z}$

Kreisgleichung für n = 0:

$$K: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 74$$

Nachweis – Durchmesser:

Mittelpunkt von $\overrightarrow{AP}$:

$$\left.\begin{array}{l} M_1\left(\frac{8-6}{2} \mid \frac{-4+6}{2}\right) \Rightarrow M_1(1 \mid 1) \\ \text{aus } K: M(1 \mid 1) \end{array}\right\} M = M_1$$

c)

Koordinaten von B und C: Schnittpunkte von Gerade und Kreis

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 74; \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 74$$

$$\begin{bmatrix}7-6t\\5+t\end{bmatrix}^2 = 74$$

$$(7-6t)^2 + (5+t)^2 = 74$$

$$49 - 84t + 36t^2 + 25 + 10t + t^2 = 74$$

$$37t^2 - 74t = 0$$

$$t \cdot (37t - 74) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \vee \quad 37t - 74 = 0 \Rightarrow t_2 = 2$$

in g: $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B(8|6)}$

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C(-4|8)}$

Lotfußpunkte auf einer Geraden:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{14^2 + 10^2} = \sqrt{196 + 100} = \sqrt{296} = \sqrt{4 \cdot 74} = 2 \cdot \sqrt{74} \\ \text{aus } K: r^2 = 74 \Rightarrow r = \sqrt{74} \Rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{74}\end{array}\right\} \overrightarrow{AP} \text{ ist Durchmesser des Kreises}$$

- Punkte ABC liegen auf dem Kreis
- nach Satz des Thales:
  - $\triangle ACP$ ist rechtwinklig $\Rightarrow \measuredangle ACP = 90°$
    Lot von P auf $b = \overline{AC}$ hat C als Lotfußpunkt
  - $\triangle ABP$ ist rechtwinklig $\Rightarrow \measuredangle ABP = 90°$
    Lot von P auf $c = \overline{AB}$ hat B als Lotfußpunkt
- Die Seite $a = \overline{BC}$ liegt auf der Geraden durch B und C
- $\Rightarrow$ Lot von P auf $a = \overline{BC}$ liegt demzufolge auf der Geraden durch B und C
- $\Rightarrow$ Alle drei Lotfußpunkte liegen auf einer Geraden.