Abitur - Grundkurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 2002

Gebiet G2 – Analytische Geometrie

Aufgabe 2.1.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie der Punkt $A(1|2|3)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ rechtwinklig zueinander liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B und D, für die gilt:
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}$ bzw. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C, so dass ein Rechteck ABCD entsteht.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Rechteckseite $\overline{AB}$ (siehe Aufgabe a)) zur x-y-Ebene verläuft.
Prüfen Sie, ob die Strecke $\overline{AB}$ die x-y-Ebene durchstößt.

c) Durch Rotation des Rechteckes ABCD (siehe Aufgabe a)) um die Symmetrieachse, die senkrecht zur Seite $\overline{AB}$ verläuft, entsteht ein Kreiszylinder.
Berechnen Sie von diesem Zylinder die Maßzahl der Körperhöhe sowie von der Grund- und Deckfläche die Koordinaten der Mittelpunkte und der Maßzahl des Radius.
Bei dieser Rotation gibt es eine parallele Lage des Rechtecks zur y-z-Ebene.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dann das Rechteck liegt.

Lösung:

a) <u>Nachweis – rechter Winkel:</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 - 16 + 16 = 0 \Leftarrow \measuredangle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$$

<u>Koordinaten von B und D:</u>

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B(5|0|7)}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{D(1|10|7)}$$

<u>Koordinaten des Punktes C:</u>

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C(5|8|11)}$$

b) <u>Winkel:</u>

Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+4+16} \cdot 1} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}189°$$

$\Rightarrow$ Schnittwinkel mit Ebene: $\alpha = 90° - \varphi = \underline{41{,}81°}$

<u>Prüfung auf Durchstoßpunkt:</u>

z-Koordinaten der Punkte A und B sind positiv $\Rightarrow$ Strecke durchstößt die Ebene nicht!

(Hinweis: Wenn als Vektor aufgefasst, dann ergibt sich der Durchstoßpunkt als $S\left(-2 \,|\, \frac{7}{2} \,|\, 0\right)$)

c) <u>Körperhöhe:</u>

$$h = \left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = \underline{4 \cdot \sqrt{5}\,\text{LE} \approx 8{,}94\,\text{LE}}$$

<u>Koordinaten der Mittelpunkte:</u>

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M_1(3|1|5)}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M_2(3|9|9)}$$

<u>Radius:</u>

$$r = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+4+16} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36} = \frac{1}{2} \cdot 6 = \underline{3\,\text{LE}}$$

<u>Koordinatengleichung der Ebene:</u>

Rechteck parallel zur y-z-Ebene: y- und z- Koordinaten sind Null

Normalenvektor der Rechteckebene: $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

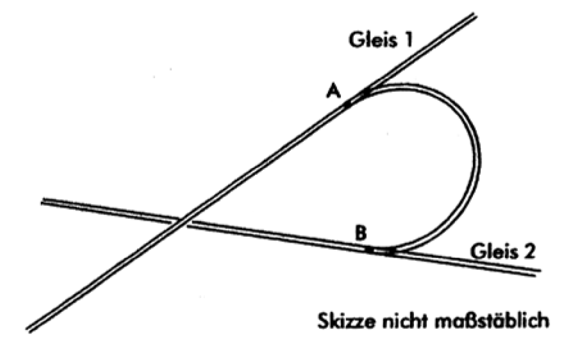
$$M_1 \in E_R \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OM_1}\right) = 0$$

Mit
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \underline{x - 3 = 0}$$

Aufgabe 2.2.

Zwei geradlinige, einander kreuzende Gleise sollen zwischen den Punkten A und B durch ein kreisförmig verlaufendes Gleis verbunden werden (siehe Skizze).
Die zu betrachtende Problematik wird in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene mit dem Ursprungspunkt O beschrieben. Eine Einheit entspricht 10 m. Die Lage der Gleise wird durch die jeweils eine Teilbereich der Geraden g_1 und g_2 bzw. eine Bogen des Kreises k charakterisiert. (Die Geraden g_1 und g_2 müssen Tangenten des Kreises k sein.)



Gegeben sind:

$$g_1:\ \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, g_2:\ \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}, \qquad t,s\in R, \qquad A(8|6), \qquad B(8|-6)$$

a) Berechnen Sie das Gradmaß des kleineren Winkels, unter dem die beiden Gleise einander kreuzen, und zeigen Sie, dass dieser Winkel und der Winkel $\measuredangle AOB$ kongruent sind.

b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Geraden g_1 in Normalenform und eine Gleichung der zu dieser Geraden senkrechten Geraden $\overline{g_1}$ durch den Punkt A.
Begründen Sie, dass die Mittelpunkte von Kreisen, für die die Geraden g_1 und g_2 Tangenten sind, auf der x-Achse liegen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k und die Länge des Kurvenradius des Verbindungsgleises.
In den Schnittpunkten der Geraden $\overline{g_1}$ mit dem Kreis k sollen Signalgeber installiert werden.
Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an und ermitteln Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Lösung:

a) Gradmaß des kleineren Winkels:

$$\cos(\varphi_2) = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{16+9}} = \frac{-16+9}{\sqrt{25}^2} = \frac{-7}{25}$$

$$\varphi_2 = \arccos\left(\frac{-7}{25}\right) = 106{,}26° \Rightarrow \underline{\varphi_1 = 73{,}74°}$$

Winkelkongruenz:

$$\text{Vereinbarung}: \measuredangle(AOB) = \gamma$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{64+36}\cdot\sqrt{64+36}} = \frac{64-36}{\sqrt{100}^2} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{7}{25}\right) = \underline{73{,}74° \Rightarrow \varphi_1 = \gamma}$$

b) g1 in Normalenform (parameterfrei):

$$g_1:\ \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4t \Rightarrow t = \frac{x}{4} \quad \text{in } y = 3t \Rightarrow \underline{y = \frac{3}{4}x}$$

Gleichung für $\overline{g_1}$:

$n(x) = m_n x + n_n$

$\mathrm{I}: \quad m_n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow n(x) = -\frac{4}{3}x + n_n$

$\mathrm{II}: \text{ mit } A(8|6) \Rightarrow \quad 6 = -\frac{4}{3}\cdot 8 + n_n \Rightarrow n_n = 6 + \frac{32}{3} = \frac{50}{3} \Rightarrow \overrightarrow{g_1}: \ \underline{n(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}}$

<u>Begründung:</u>
Da die Punkte A und B gleiche x-Koordinaten und betragsmäßig gleiche y-Koordinaten haben, halbiert die Abszisse (x-Achse) den von den Geraden g_1 und g_2 aufgespannten Winkel φ_1 im Koordinatenursprung.

<u>Mittelpunkt von k:</u>

(1) A und B sind Punkte des Kreises mit Abszisse als Winkelhalbierende
$\Rightarrow$ M auf Abszisse $\Rightarrow m_y = 0$

(2) M liegt auf $\overline{g_1}$

$$n(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$$

$$0 = -\frac{4}{3}m_x + \frac{50}{3} \Rightarrow m_x = \frac{50}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{50}{4} = \underline{\frac{25}{2} = 12{,}5}$$

$$\Rightarrow \underline{M\left(\frac{25}{2}\,|\,0\right)}$$

<u>Länge des Kurvenradius:</u>

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2 \ \text{ mit } \ A(8|6) \ \text{ und } M\left(\frac{25}{2}\,|\,0\right)$$

$$\left(8 - \frac{15}{2}\right)^2 + (6 - 0)^2 = r^2$$

$$20{,}25 + 36 = r^2 \Rightarrow r = 7{,}5\,\mathrm{LE}$$

$$\Rightarrow \underline{r = 75\,\mathrm{m}}$$

oder:

$$r = \left|\overline{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{25}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} \Rightarrow \underline{r = 75\,\mathrm{m}}$$

<u>Kreisgleichung:</u>

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2 \ \text{ mit } \ M\left(\frac{25}{2}\,|\,0\right)$$

$$\underline{\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{225}{4}} \ \text{ oder } \ \underline{\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{225}{4}}$$

<u>Schnittpunkte von k und $\overline{g_1}$:</u>

(1) $S_1 = A$

$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AM}$

(2) $\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S_2(17\,|\,-6)}$