Abitur - Grundkurs Mathematik

Sachsen-Anhalt 2002

Gebiet G1 - Analysis

Aufgabe 1.1.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit einer Funktionsgleichung der Form
$y = f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \qquad a, b, c, d, x \in R$
schneidet die x-Achse im Punkt $S_x(2|0)$ sowie die y-Achse im Punkt $S_y(0|1)$ und berührt die x-Achse im Punkt $B_x(-1|0)$.

a) Ermitteln Sie die Werte der Parameter a, b, c, d und geben Sie die Gleichung der Funktion f an.

$$\left[\text{Ergebnis zur Kontrolle: } y = f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1\right]$$

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f, ermitteln Sie deren Art und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zum Punkt S_y ist.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-2,5 \le x \le 2,5$.

c) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche vollständig. Der Flächeninhalt habe die Maßzahl A. Berechnen Sie diese Maßzahl.
Jede Gerade g mit der Gleichung $y = m x + 1,\ m \in R,\ m < 0$ begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig. Der Flächeninhalt habe die Maßzahl A_1. Ermitteln Sie dese Maßzahl in Abhängigkeit von m.
Berechnen Sie eine Wert für m, wenn für das Verhältnis der Maßzahlen $A : A_1 = 4 : 1$ gilt.

d) Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(u\,|\,f(u)),\ u \in R,\ 0 < u < 2$ des Graphen der Funktion f schneidet die x-Achse im Punkt Q. Die Punkte O, P, Q sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie eine Gleichung zur Berechnung der Maßzahl des Flächeninhalts diese Dreiecks in Abhängigkeit vom Parameter u.
(Anmerkung: Diese Gleichung kann als Gleichung der Zielfunktion zur Ermittlung des maximalen Flächeninhalts des beschriebenen Dreiecks angesehen werden.)

Lösung:

a)

$y = f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \qquad a, b, c, d, x \in R$

1. Ableitung:

$f'(x) = 3a x^2 + 2b x + c$

Bedingungen:

I: $f(0) = 1 \quad \Rightarrow \underline{d = 1}$

II: $f(2) = 0 \quad \Rightarrow 0 = 8a + 4b + 2c + 1$

III: $f(-1) = 0 \quad \Rightarrow 0 = -a + b - c + 1$

IV: $f'(-1) = 0 \quad \Rightarrow 0 = 3a - 2b + c$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llll}
\text{III}+\text{IV}: & \text{III}': & 0=2a-b+1 & \Rightarrow b=2a+1 \\
\text{II}+2\cdot\text{III}: & \text{II}': & 0=6a+6b+3 & \Rightarrow a=-b-\frac{1}{2} \\
\text{II}' \text{ in } \text{III}': & b=-2b & & \Rightarrow \underline{b=0} \\
\text{in } \text{III}': & 0=2a+1 & & \Rightarrow \underline{a=-\frac{1}{2}} \\
\text{in } \text{IV}: & 0=-\frac{3}{2}+c & & \Rightarrow \underline{c=\frac{3}{2}}
\end{array}$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{y=f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x+1}$$

b)

1. bis 3. Ableitung:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x+1$$

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2} \qquad f''(x)=-3x \quad f'''(x)=-3$$

Extrempunkte:

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{E_1}=1 \wedge x_{E_2}=-1$$

$$f''(1)=-3<0 \Rightarrow \text{Max.} \qquad f(1)=2 \qquad \Rightarrow \underline{H(1|2)}$$

$$f''(-1)=3<0 \Rightarrow \text{Min.} f(-1)=0 \qquad \Rightarrow \underline{T(-1|0)}$$

Wendepunkte:

$$f''(x)=-3x=0 \Rightarrow x_W=0$$

$$f'''(0)=-3\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt} \qquad f(0)=1 \qquad \Rightarrow \underline{W(0|1)}$$

Symmetrie:

Zentralsymmetrie zum Punkt $S_y(0|1)$:

Aus $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x+1 \wedge f(x)=g(x)-1 \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$

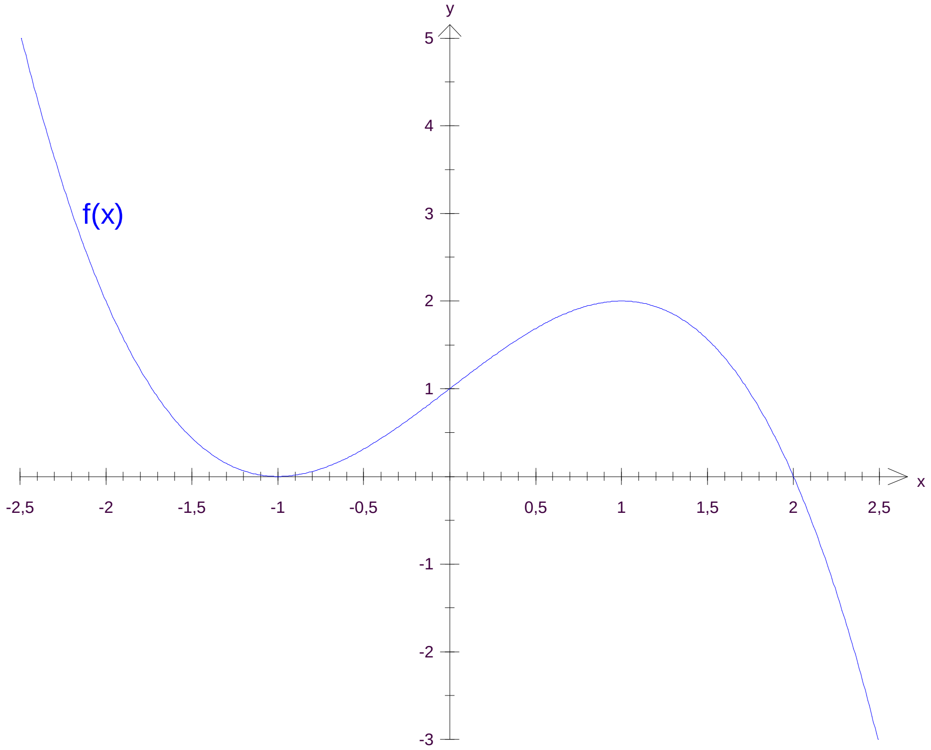
Zentralsymmetrie von $g(x)$ zum Punkt $S(0|0)$:

$$g(x)=-g(-x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x=-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x \Rightarrow \text{Zentralsymmetrie von } g(x) \text{ zum Punkt } S(0|0)$$

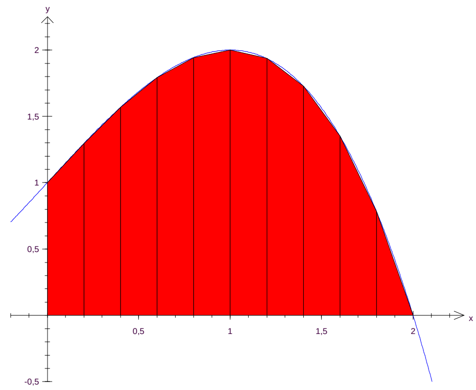
Da f(x) um 1 gegenüber g(x) in Ordinatenrichtung verschoben ist, ist auch der Punkt der Zentralsymmetrie um 1 in gleicher Richtung verschoben (das Verhalten der Kurve wird durch einen konstanten Summanden nicht verändert, lediglich alle Funktionswerte werden um den Summanden erhöht).

Graph der Funktion:



c)

Flächeninhalt A:

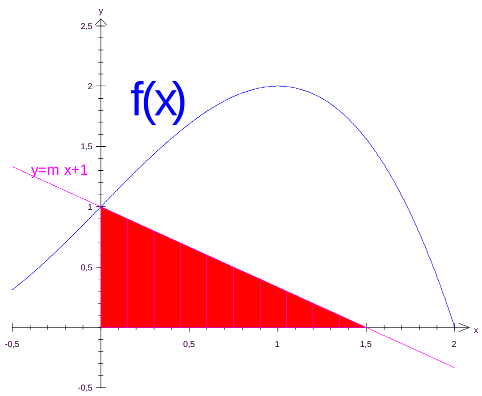


$$A = \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1 \right) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + x \right]_0^2$$

$$A = -2 + 3 + 2 = \underline{3\,FE}$$

Flächeninhalt A_1:



$$A = \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot y(0)$$

$$\text{Nullstelle}: y = m\,x + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{m}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{m} \right) \cdot 1 = \underline{-\frac{1}{2m}}$$

Wert für m:

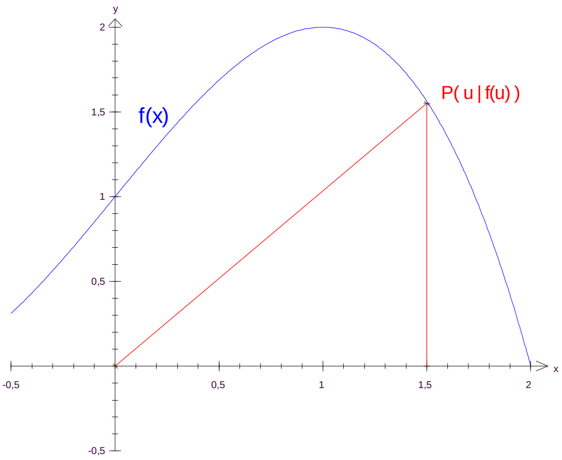
$$\frac{A}{A_1} = \frac{4}{1} = \frac{3}{-\frac{1}{2m}} \Rightarrow -6m = 4 \Rightarrow \underline{m = -\frac{2}{3}}$$

d) Gleichung A(u):

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1 \right)$$

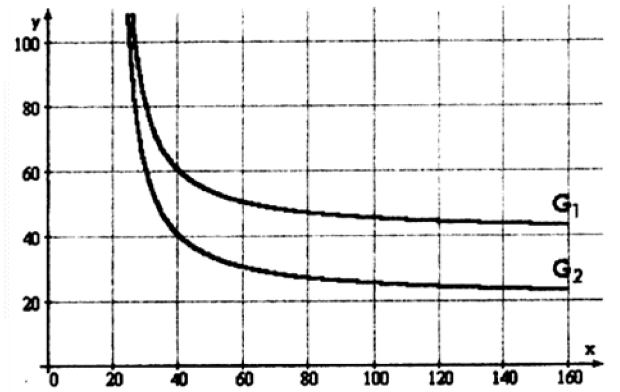
$$\underline{A(u) = -\frac{1}{4}u^4 + \frac{3}{4}u^2 + \frac{1}{2}u}$$



Aufgabe 1.2.

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y=f(x)=\frac{20x}{x-20},\ x\in\mathbb{R}, x>20.$$



a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, auf Polstellen, auf das Monotonieverhalten und das Verhalten für $x\to\infty$.
Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f weder lokale Extrempunkte noch Wendepunkte besitzt.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f bei Annäherung an die Stelle x = 20.
Die nebenstehende Zeichnung zeigt im Intervall $20<x\le 160$ die Graphen G_1 und G_2 zweier Funktionen, von denen nachfolgende Funktionsgleichungen gegeben sind:

(I) $y=f(x)=\frac{20x}{x-20}$ (II) $y=f(x)=20+\frac{400}{x-20}$ (III) $y=f(x)=40+\frac{400}{x-20}$

Ordnen Sie den Graphen diese Funktionsgleichungen zu.

b) Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Fläche, den der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen x = 40 und x = 100 vollständig begrenzen.
Die Graphen G_1 und G_2 und die Geraden mit den Gleichungen x = 40 und x = a, a $\in$ R, a > 40, begrenzen eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

c) Die Funktion f beschreibt in der Strahlenoptik die Bildweite y (in mm) in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite x (in mm) bei der Abbildung durch eine dünne Konvexlinse mit der Brennweite 20 mm.
Geben Sie die Gegenstandweite x für den Fall an, dass bei der Abbildung kein Bild entsteht und geben Sie die Bildweite y für den Fall an, dass der Gegenstand ins Unendliche rückt.
Berechnen Sie die Gegenstandsweite x für den Fall, dass sie $\frac{1}{4}$ der Bildweite y beträgt.

Lösung:

a) Nullstellen:

$$f(x)=\frac{20x}{x-20}=0\Rightarrow 20x=0\Rightarrow x_0=0\notin L\Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

Polstellen:

$$f(x)=\frac{20x}{x-20}\Rightarrow x_P-20=0\Rightarrow x_P=20\notin L\Rightarrow \text{keine Polstelle}$$

Monotonie:

$$f(x)=\frac{20x}{x-20}$$

$$f'(x)=\frac{20\cdot(x-20)-20x}{(x-20)^2}=\frac{20x-400-20x}{(x-20)^2}=-\frac{400}{(x-20)^2}$$

Da Nennerpolynom stets > 0 und Zählerpolynom stets < 0

$$\Rightarrow \underline{f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \text{ist streng monoton fallend}}$$

Grenzwert für $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{20x}{x-20}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x}{x\cdot\left(1-\frac{20}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{20}{1-\frac{20}{x}}=\frac{20}{1-0}=\underline{20}$$

Nachweis – weder Extrem- noch Wendepunkte:

$$f(x)=\frac{20x}{x-20};\ f'(x)=-\frac{400}{(x-20)^2}\ \text{(siehe Monotonie)}$$

$$f''(x)=-\frac{-400\cdot 2\cdot(x-20)\cdot 1}{(x-20)^4}=\frac{800}{(x-20)^3}$$

$$f'(x)=-\frac{400}{(x-20)^2}=0\Rightarrow 400=0\Rightarrow \text{falsche Aussage}\Rightarrow\ \text{notwendige Bedingung nicht erfüllt}$$

$$f''(x)=\frac{800}{(x-20)^3}=0\Rightarrow 800=0\Rightarrow \text{falsche Aussage}\Rightarrow\ \text{notwendige Bedingung nicht erfüllt}$$

Verhalten der Funktion für $x\to 20$:

$$\lim_{\substack{x\to 20\\ x>20}}\frac{20x}{x-20}\quad \text{Erstzfolge}: x_n=20+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{20\cdot\left(20+\frac{1}{n}\right)}{20+\frac{1}{n}-20}=\lim_{n\to\infty}\frac{400+\frac{20}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot(400n+20)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(400n+20)=\underline{\infty}$$

Zuordnung der Gleichungen:

(I) und (II) $\rightarrow$ G_2

$$\text{(I)}\ y=f(x)=\frac{20x}{x-20}\quad \text{(II)}\ y=f(x)=20+\frac{400}{x-20}$$

$$f(x)=\frac{20\cdot(x-20)+400}{x-20}$$

$$f(x)=\frac{20x-400+400}{x-20}=\frac{20x}{x-20}$$

(II) $\rightarrow$ G_1

$$\lim_{x\to\infty}\left(40+\frac{400}{x-20}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(40+\frac{\frac{400}{x}}{x\cdot\left(1-\frac{20}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(40+\frac{0}{1-\frac{20}{x}}\right)=40+\frac{0}{1-0}=\underline{40}$$

b) Flächeninhalt:

$$A=\int_{40}^{100}\frac{20x}{x-20}\,dx=\int_{40}^{100}\left(20+\frac{400}{x-20}\right)dx$$

$$A=\left[20x+400\cdot\ln(x-20)\right]_{40}^{100}$$

$$A=2\,000+400\cdot\ln(80)-800-400\cdot\ln(20)$$

$$A=1200+400\cdot\left[\ln(80)-\ln(20)\right]$$

$$A=1200+400\cdot\ln\left(\frac{80}{20}\right)=1200+400\cdot\ln(4)=\underline{400\cdot(3+\ln(4))\approx 1754{,}52\ \text{FE}}$$

Nachweis – lineare Funktion:

$$A_a = \int_{40}^{a} \left[\left(40 + \frac{400}{x-20} \right) - \left(20 + \frac{400}{x-20} \right) \right] dx$$

$$A_a = \int_{40}^{a} 20 \, dx = \left[20x \right]_{40}^{a} = \underline{20a - 800}$$

c) Gegenstandsweite:

$$y = \frac{20x}{x-20} \text{ kein Bild: } y \to \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_B} \frac{20x}{x-20} = \lim_{x \to x_B} \frac{20}{1 - \frac{20}{x}} = \infty$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{20}{x} \to 0 \Rightarrow 1 = \frac{20}{x} \Rightarrow \underline{x = 20} \Rightarrow \underline{\text{Gegenstandsweite } 20\,\text{mm}}$$

Bildweite:

$$y = \frac{20x}{x-20} \text{ für } x \to \infty \quad \text{(siehe Teilaufgabe a))}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{20x}{x-20} = \lim_{x \to \infty} \frac{20x}{x \cdot \left(1 - \frac{20}{x} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{20}{1 - \frac{20}{x}} = \frac{20}{1-0} = \underline{20} \Rightarrow \underline{\text{Bildweite: 20 mm}}$$

Gegenstandsweite:

$$y = \frac{20x}{x-20} \text{ mit } x = \frac{1}{4} y$$

$$4x = \frac{20x}{x-20}$$

$$4x^2 - 100x = 0$$

$$x \cdot (4x - 100) = 0$$

$$x_1 = 0 \notin L(x > 20) \quad \vee \; 4x - 100 = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = 25\,\text{mm}}$$